ZBIÓR ZADAŃ Z MATEMATYKI - MATURA (POZIOM ROZSZERZONY)

wersja 2023/2024

Edukacja Karol Suchoń

www.karolsuchon.pl

kontakt:

kontakt@karolsuchon.pl

Kraków 2023

Spis treści

1. Podstawowe równania i nierówności

Do matury rozszerzonej niezbędne jest biegłe rozwiązywanie wszelkiego rodzaju równań (liniowe, kwadratowe, wielomianowe, wymierne, z wartością bezwzględną). Konieczna jest zatem sprawność w rachunku algebraicznym (w tym wyciąganie wspólnego czynnika poza nawias) oraz bezbłędne posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia, rozkład na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia oraz grupowania wyrazów, a także zastosowanie wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty) oraz schematu Hornera w rozkładzie wielomianów na czynniki. Dopuszcza się oczywiście rozkładanie „w pamięci” tzn. bez użycia wyróżnika czy schematu Hornera.

1.1. Wzory skróconego mnożenia.

Oblicz (rozwiń wyrażenie):

(1) $(x+1)^2$
(2) $(x-2)^2$
(3) $(x-3)^2$
(4) $(x+4)^2$
(5) $(x+5)^2$
(6) $(2x+1)^2$
(7) $(3x-4)^2$
(8) $(x+\sqrt{2})^2$
(9) $(x^2-3)^2$
(10) $(x^3+1)^2$
(11) $(3-\sqrt{2})^2$
(12) $(5-\sqrt{11})^2$
(13) $(2\sqrt{3}-3)^2$
(14) $(3x+y)^2$
(15) $(4x-3m)^2$
(16) $(x-4)(x+4)$
(17) $(2x-3)(2x+3)$
(18) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$
(19) $(3x-5)(3x+5)$
(20) $(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})$
(21) $(6-x)(6+x)$
(22) $(x-1)^3$
(23) $(x+2)^3$
(24) $(3x+1)^3$
(25) $(x-1)(x^2+x+1)$
(26) $(x-3)(x^2+3x+9)$
(27) $(x+1)(x^2-x+1)$
(28) $(x+2)(x^2-2x+4)$

Przedstaw w postaci kwadratu lub iloczynu (rozłóż na czynniki):

(29) x^2-2x+1
(30) $x^2+10x+25$
(31) $x^2-14x+49$
(32) x^2+6x+9
(33) $4x^2-4x+1$
(34) $9x^2+12x+4$

(35) $x^2-2\sqrt{3}x+3$
(36) x^2-25
(37) $4x^2-9$
(38) x^2-5
(39) x^4-81
(40) x^3+1
(41) x^3-8
(42) $27x^3+1$
(43) x^4-2x^2+1
(44) x^3+10x^2+25x
(45) x^4+2x^2+1
(46) x^4-18x^2+81
(47) x^3-4x
(48) x^4+8x
(49) n^5-n
(50) $4x^2-12x+9$
(51) $3x^2-6x+3$
(52) $n^6-2n^4+n^2$
(53) x^5+2x^3+x
(54) x^8-x^4
(55) x^8-1

1.2. Równania i nierówności liniowe.

Rozwiąż następujące równania i nierówności:
(56) $(x-2)^2-(x+1)^2=3x$,
(57) $\frac{x-2}{3}+\frac{2x+5}{6}=\frac{x+1}{2}$,
(58) $(x+3)^2-(x-5)(x+5)=0$,
(59) $x-\frac{3x-1}{2}=4\frac{1}{2}$,
(60) $3(x+2)-(3x-2)>-2(\frac{x}{2}+3)$,
(61) $\frac{x+3}{7}-\frac{3-2x}{5}\leqslant-(3+x)$,
(62) $x+\sqrt{3}\geqslant 3+\sqrt{3}x$
(63) $(x-2)^3>x(x-2)(x+2)-6x^2$

1.3. Równania i nierówności kwadratowe.

Rozwiąż równania i nierówności:
(64) $(x-3)(x+2)=0$
(65) $x(x-3)=0$
(66) $x^2-6=0$
(67) $x^2+16=0$
(68) $x^2+4x=0$
(69) $x^2-x=0$
(70) $x^2+2x+3=0$
(71) $2x^2+5x+3=0$
(72) $x^2-2x-2=0$
(73) $3x^2=5x+2$
(74) $x^2+4x+4=0$
(75) $-x^2+5x-6=0$
(76) $x^2-9\leqslant 0$
(77) $x^2+3>0$

(78) $x^2 + 5 < 0$
(79) $x^2 - 8x < 0$
(80) $(x-3)(x+5) \geqslant 0$
(81) $x^2 + x - 2 < 0$
(82) $-x^2 + 8x - 15 \leqslant 0$
(83) $-x^2 - 4x - 3 \geqslant 0$
(84) $-(x+3)(x-2) \geqslant 0$
(85) $x^2 + 3x + 6 < 0$
(86) $-x^2 + x - 4 < 0$
(87) $x^2 + 10x + 25 \leqslant 0$
(88) $-x^2 + 8x - 16 < 0$
(89) (MP 2013) $2x^2 - 7x + 5 \geqslant 0$
(90) (MP 2017) $8x^2 - 72x \leqslant 0$
(91) (MP 2020) $2(x-1)(x+3) > x - 1$
(92) (MPC 2021) $2(x+1)(x-3) < x^2 - 9$
(93) (MPC 2023) $x(2x-1) < 2x$

1.4. Równania i nierówności wielomianowe.

Rozwiąż równania i nierówności:
(94) $(x-3)(2x+4)(x-4) = 0$
(95) $(x^2-9)(x^2+16) = 0$
(96) $x^3 - x = 0$
(97) $x^3 + x = 0$
(98) $x^3 + x^2 = 0$
(99) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$
(100) $2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$
(101) $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$
(102) $2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$
(103) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$
(104) $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = 0$
(105) $x^3 + 3x^2 + 5x + 15 = 0$
(106) $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$
(107) $x^3 + 4 = x^2 + 4x$
(108) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$
(109) $x^3 - 4x - 15 = 0$
(110) $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$
(111) $x^3 + 4x^2 - 22x + 20 = 0$
(112) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
(113) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
(114) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
(115) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$
(116) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$
(117) $(x-1)(x-3)(x-5) > 0$
(118) $(x+3)(x^2-4)(x-1)^2 \geqslant 0$
(119) $(x+1)^3(x-3)^2(x+5) \leqslant 0$
(120) $x^2(x-1)^2(x^2-1) < 0$
(121) $x^4 - x^2 \geqslant 0$
(122) $x^4 + x^3 - 8x - 8 > 0$
(123) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leqslant 0$

(124) $x^3+x^2+5x+5<0$
(125) $x^3-2x^2-4x+8\leqslant 0$
(126) $x^3\leqslant 9x$
(127) $x^4+6x^3-x^2-6x<0$
(128) $x^4-2x^3-27x+54\leqslant 0$
(129) $(6-x)(x^2+4x+4)(x^2-36)\geqslant 0$
(130) $(x-7)^3+2(x-7)^2-3(x-7)<0$
(131) $(x^2-25)-3(x-5)^3\geqslant 0$
(132) $-x(x^3-8)(x^2-2x)(x^2+x-12)>0$
(133) $(1-x^2)(x^2+2x+1)(x^2+x-2)>0$
(134) $(x^2-6x+5)(-x^2+10x-25)(4x-4)\leqslant 0$
(135) $x^2(x^2-1)(x^3+1)<0$
(136) $(x-3)(x-2)(x-1)\leqslant (x-3)(x-1)$
(137) (MR 2012) $x^4+x^2\geqslant 2x$

1.5. Równania i nierówności wymierne.

Rozwiąż równania i nierówności:
(138) $\frac{1}{x-2}=\frac{4x-5}{3x-2}$
(139) $\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=2+\frac{3+x}{x-1}$
(140) $\frac{x-3}{x-6}\leqslant 0$
(141) $\frac{x-3}{x-6}>4$
(142) $\frac{x+1}{x-3}\geqslant\frac{2x+12}{x}$
(143) $\frac{x(x+1)(x+2)}{1-x^2}\leqslant 0$
(144) $\frac{4}{x^2-2x}+\frac{2x-2}{x^2-4}\geqslant 1$
(145) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}>\frac{1}{x+3}$
(146) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{9}{x-1}\leqslant\frac{23}{x^2-x}$
(147) (MR 2021) $\frac{2x-1}{1-x}\leqslant\frac{2+2x}{5x}$
(148) $\frac{4}{x+1}\leqslant\frac{x+5}{x^2-1}$

2. Wartość bezwzględna - równania, nierówności, wykresy

2.1. Równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Rozwiąż równania i nierówności:

(149) $|x| = 5$
(150) $|x + 1| = 0$
(151) $|x - 3| = -2$
(152) $|2x - 5| = 11$
(153) $||x + 1| + 3| = 2$
(154) $||x| - 4| = 2$
(155) $||x - 3| - 2| = 5$
(156) $|x - 3| + |x + 1| = 6$
(157) $|x + 3| = 2x - 6$
(158) $|x - 2| = x + |2x|$
(159) $|x| < 3$
(160) $|x| \geqslant 4$
(161) $|x| < 0$
(162) $|x| \geqslant -3$
(163) $|x + 1| \leqslant 2$
(164) $|x + 2| \geqslant 6$
(165) $|x - 4| > 2$
(166) $\sqrt{x^2 + 14x + 49} < 2$
(167) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} \leqslant 5$
(168) $|2x + 1| \geqslant 11$
(169) $|3x - 1| < 5$
(170) $|x| + 3|x - \frac{1}{3}| < 4$
(171) $||x - 3| - 4| > 2$
(172) $|2 - |3 - x|| < 1$
(173) $|5 - x| < x + 1$
(174) $|x + 5| - 2|x + 1| < 3$
(175) $|3x - 6| - 4|x + 5| > 2x - 5$
(176) $3|x - 4| - |4x + 8| > 4 - 3x$
(177) (MR 2013) $|2x - 5| - |x + 4| \leqslant 2 - 2x$
(178) (MRC 2012) $|x - 2| + |x + 1| \geqslant 3x - 3$
(179) (MRC 2013) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} \geqslant 11 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.
(180) (MRC 2014) $|x + 6| - 2|x - 4| \leqslant 2x - 3$.
(181) (MRS 2010) $|2x + 2| + |x - 2| > 5$.

2.2. Wartość bezwzględna - pozostałe zadania.

(182) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ||x - 1| - 2|$ oraz zbadaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

(183) Dla jakich wartości m równanie $|x - 2| = m^2 - 3m - 2$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

(184) Dla jakich wartości m równanie $|x + 5| = 9 - m^2$ ma dwa ujemne rozwiązania?

(185) Dla jakich wartości m równanie $||x-3|-5| = 3m+2$ ma cztery różne rozwiązania?

(186) (MR 2020) Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $|x - 5| = (a - 1)^2 - 4$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

3. Dowody algebraiczne

3.1. Dowodzenie równości.

(187) Mając dane $a + b = 6$ oraz $ab = 4$, oblicz wartości wyrażeń: $a^2 + b^2, a^3 + b^3$, $a^4 + b^4, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, a^2b + ab^2, (a - b)^2, |a - b|$.

(188) Udowodnij, że jeśli $a + b = 10$ oraz $a^2 - b^2 = 70$, to $a - b = 7$.

(189) Dane jest $ab = -3$ oraz $a + b = 2$. Wykaż, że $a^3 + b^3 = 26$

(190) Dane jest $ab = 3$ oraz $a - b = \sqrt{2}$. Wykaż, że $a^2 + b^2 = 8$

(191) Wiedząc, że $a + b = 6$ oraz $a^3b + ab^3 = 154$ oblicz wartość wyrażenia ab.

(192) Wykaż, że jeżeli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

(193) Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$

(194) Udowodnij, że jeżeli $a \neq b$ oraz $a^2 + a = b^2 + b$, to $a + b = -1$

(195) Uzasadnij, że jeśli liczby x i y są różne od zera oraz $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = x - y$, to $x = y$ lub $xy = -1$.

(196) Wiedząc, że $k^2 - 6kn + 8n^2 = 0$ oraz $kn \neq 0$ wykaż, że $\frac{k}{n} = 2$ lub $\frac{k}{n} = 4$.

(197) Udowodnij, że jeżeli $2a^3 + ab^2 + a = 4a^2b + 2b^3 + 2b$, to $a = 2b$.

(198) (MR 2011) Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.

(199) (MR 2020) Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.

(200) (MRC 2018) Wykaż, że równanie $x^8 + x^2 = 2(x^4 + x - 1)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x = 1$.

(201) (MRG 2014) Dane są liczby a, b takie, że $a - b = 4$ i $ab = 7$. Oblicz $a^3b + ab^3$.

(202) Wykaż, że jeżeli $a^4 + a^2b^2 + a^2 + b^2 \leqslant 2a^3b + 2ab$, to $a = b$.

(203) Udowodnij, że jeśli $a + b + c = 0$ oraz $abc = 1$ to $a^3 + b^3 + c^3 = 3$.

3.2. Dowodzenie nierówności.

(204) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y zachodzi nierówność $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$.

(205) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$.

(206) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

(207) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y zachodzi nierówność $4x^2 + 8xy + 5y^2 \geqslant 0$.

(208) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y zachodzi nierówność $x^2 + 10y^2 + 1 \geqslant 6xy + 2y$.

(209) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 10x + 25 \geqslant 0$.

(210) Wykaż, że nierówność $x^4 - 5x^2 - 2x + 10 > 0$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od 1.

(211) Wykaż, że jeśli $a > b$, to $a^3 + a^2b \geqslant b^3 + b^2a$.

(212) Wykaż, że jeżeli $a < 1$ i $b < 1$, to $ab + 1 > a + b$.

(213) Wykaż, że jeśli $a > 1$ oraz $b > 1$ oraz $a > b$, to $a^2 - 2a > b^2 - 2b$.

(214) Udowodnij, że jeżeli liczby a i b są nieujemne, to zachodzi nierówność $4a^3 + b^3 \geqslant 3ab^2$.

(215) Dodatnie liczby a i b oraz większa od 1 liczba c spełniają warunek $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Udowodnij, że $ab > a + b$.

(216) Udowodnij, że dla dowolnych liczb a, b i c zachodzi nierówność $a^2+4b^2+3c^2+13 \geqslant 2a+12b+6c$.

(217) Udowodnij, że gdy $a+b=4$, to $a^2+b^2 \geqslant 8$.

(218) Udowodnij, że gdy $a+b=4$, to $ab \leqslant 4$.

(219) Uzasadnij, że jeśli $xy=10$, to $(x+y)^2 \geqslant 40$

(220) Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie oraz $ab=49$, to $(a+1)(b+1) \geqslant 64$

(221) Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie oraz $a+b=10$, to $(a-2)(b-2) \leqslant 9$

(222) Udowodnij, że gdy $a^2+b^2=8$ oraz $a,b \geqslant 0$, to $ab \leqslant 4$.

(223) Udowodnij, że gdy $a^2+b^2=8$ oraz $a,b \geqslant 0$, to $a+b \leqslant 4$.

(224) Udowodnij, że gdy $ab=4$ oraz $a,b \geqslant 0$, to $a+b \geqslant 4$.

(225) Wykaż, że jeżeli $x+y>0$, to $9x^3+3x^2y-5xy^2+y^3 \geqslant 0$.

(226) (MRG 2013) Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $20x^2-24mx+18m^2 \geqslant 4x+12m-5$.

(227) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b,c takich, że $a \neq b$ prawdziwa jest nierówność $2a^2+2b^2+c^2+2bc+2ac>0$.

(228) Wykaż, że jeżeli $3a+b \geqslant 0$, to $12a^3+b^3 \geqslant 8a^2b+ab^2$.

(229) Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a i b takich, że $3a \geqslant b$ prawdziwa jest nierówność $3a^3+5a^2b+ab^2 \geqslant b^3$.

(230) Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b i c prawdziwa jest nierówność $a^4+b^4+c^2+1 \geqslant 2a(ab^2-a+c+1)$.

(231) Wykaż, że jeśli $x \neq 3$, to $18+3x^2+y^2>12x+2xy$.

(232) Udowodnij, że jeżeli dowolne dodatnie liczby i i u spełniają nierówność $\frac{i}{u}<2+\frac{3u}{i}$, to prawdziwa jest nierówność $i<3u$.

(233) (MR 2012) Udowodnij, że jeżeli $a+b \geqslant 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.

(234) (MR 2014) Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x,y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y}+(y+1)\frac{y}{x}>2$.

(235) (MR 2015) Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4-x^2-2x+3>0$.

(236) (MR 2016) Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2+y^2=2$, prawdziwa jest nierówność $x+y \leqslant 2$.

(237) (MR 2017) Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x,y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$.

(238) (MR 2019) Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x<y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}>2$

(239) (MRC 2012) Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c i d prawdziwa jest nierówność $ac+bd \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

(240) (MRC 2013) Uzasadnij, że jeżeli $2a+b \geqslant 0$, to $2a^3+b^3 \geqslant 3a^2b$.

(241) (MRC 2016) Wykaż, że dla $a,b,c,d>0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d} \geqslant \sqrt{ac}+\sqrt{bd}$.

(242) (MRC 2017) Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2+y^2-4xy+6x+9 \geqslant 0$.

(243) (MRG 2014) Wykaż, że jeżeli $a>b \geqslant 1$, to $\frac{a}{2+a^3}<\frac{b}{2+b^3}$.

(244) (MRS 2010) Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b.

(245) Udowodnij, że dla każdej liczby dodatniej a prawdziwa jest nierówność $a^2+\frac{2}{a} \geqslant 3$.

3.3. Dowodzenie podzielności.

(246) Wykaż, że $9|5^{100} - 2 \cdot 5^{99} + 3 \cdot 5^{98}$

(247) Wykaż, że $15|4^8 - 1$

(248) Wykaż, że $19|3^{18} - 2^{18}$

(249) Wykaż, że $30|11^3 + 19^3$

(250) Wykaż, że $3|7^3 - 2^6$

(251) Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą nie mniejszą niż 2, to liczba $3^{n+2} - 3^{n+1} + 3^n$ jest wielokrotnością liczby 63.

(252) Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 3.

(253) Wykaż, że jeżeli liczba n nie jest podzielna przez 3, to liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 3.

(254) Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 9.

(255) Dane są trzy kolejne liczby naturalne, z których pierwsza jest parzysta. Wykaż, że iloczyn tych liczb jest podzielny przez 24.

(256) Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba $n^2 - 1$ jest wielokrotnością liczby 8.

(257) Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych z dzielenia przez 3 daje resztę 2.

(258) Udowodnij, że różnica czwartych potęg dwóch liczb, z których pierwsza przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, a druga 2, jest podzielna przez 5.

(259) Udowodnij, że jeśli liczba m przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, to jej sześcian pomniejszony o 1 jest liczbą podzielną przez 7.

(260) Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b liczba $a^2b + ab^2$ jest parzysta.

(261) Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b liczba $ab(a + b)(a - b)$ jest podzielna przez 3.

(262) Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n + 1)(2n + 1)$ jest podzielna przez 6.

(263) Wykaż, że jeżeli n jest liczbą całkowitą, to liczba $n^3 - 19n$ jest podzielna przez 6.

(264) Wykaż, że jeżeli n jest parzysta, to liczba $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ jest podzielna przez 384.

(265) Wykaż, że jeżeli liczba n jest podzielna przez 3, to liczba $n^4 + 6n^3 + 9n^2$ jest podzielna przez 324.

(266) Wykaż że dla każdej liczby naturalnej n liczba $16n^3 - 4n$ jest podzielna przez 12.

(267) Wykaż że dla każdej liczby nieparzystej n liczba $n^3 + 3n^2 - n - 51$ jest podzielna przez 48.

(268) Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą parzystą, to liczba $n^3 + 6n^2 + 8n$ jest podzielna przez 48.

(269) Wykaż, że jeżeli n jest liczbą parzystą to liczba $n^4 + 4n^3 + 4n^2$ jest liczbą podzielną przez 64.

(270) (MR 2011) Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

(271) (MR 2018) Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

(272) Wykaż, że równanie $x^3 - x - 125 = 0$ nie ma rozwiązań całkowitych.

4. Funkcja kwadratowa

4.1. Własności funkcji kwadratowej.

(273) Znajdź wzór funkcji kwadratowej wiedząc, że wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji ma współrzędne $(3,2)$, a punkt $A(1,-2)$ należy do wykresu tej funkcji.

(274) Znajdź wzór funkcji kwadratowej wiedząc, że miejscami zerowymi tej funkcji są -3 i 1, a wykres zawiera punkt $(2,10)$

(275) Znajdź wzór funkcji kwadratowej wiedząc, że prosta $x=4$ jest osią symetrii wykresu tej funkcji, a punkty $(3,1)$ oraz $(6,-2)$ należą do wykresu tej funkcji.

(276) Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja $f(x)=(m^2-1)x^2-2mx+4m+5$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty,1)$ i malejąca w przedziale $(1,+\infty)$.

(277) Dla jakich wartości m nierówność $x^2-2mx+m>0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x?

(278) Dla jakich wartości m nierówność $mx^2-2mx-3<0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x?

(279) Wyznacz takie wartości m, dla których wykres funkcji $f(x)=2x^2-(2-m)x+(m+4)$ ma wierzchołek, którego obie współrzędne są liczbami ujemnymi.

(280) (MR 2012) Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

(281) (MR 2015) Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f. Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

(282) (MRC 2017) Funkcja kwadratowa $f(x)=-x^2+bx+c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1=-1$ i $x_2=12$. Oblicz największą wartość tej funkcji.

4.2. Zadania z wykorzystaniem wzorów Viéte'a.

(283) Wyznacz takie wartości m, dla których równanie $x^2+2mx+m^2-m=0$ ma dwa różne rozwiązania, których iloczyn wynosi 2.

(284) Wyznacz takie wartości m, dla których równanie $x^2+2mx+m^2-m=0$ ma dwa różne rozwiązania tego samego znaku.

(285) Wyznacz takie wartości m, dla których równanie $mx^2+(m+5)x+m+8=0$ ma dwa różne rozwiązania tego samego znaku.

(286) Dla jakich wartości parametru m równanie $3x^2-mx+m-3=0$ ma dwa różne dodatnie pierwiastki?

(287) Dla jakich wartości m funkcja $f(x)=-x^2+(m+3)x+m$ ma dwa ujemne miejsca zerowe?

(288) Wyznacz te wartości m, dla których różne pierwiastki równania $x^2-2x+m=0$ spełniają warunek $x_1^2+x_2^2<8$.

(289) Dane jest równanie $x^2-(m-4)x+m^2-7m+12=0$ z niewiadomą x. Wyznacz te wartości parametru m, dla których iloczyn różnych pierwiastków danego równania jest równy połowie sumy tych pierwiastków.

(290) Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2-mx+m^2-2m+1=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest o 1 większa od ich iloczynu?

(291) Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $x^2+3x-\frac{m-2}{m-3}=0$ ma dwa pierwiastki, których suma sześcianów jest równa -9.

(292) Dla jakich wartości k równanie $x^2-2x-\frac{k-5}{k+3}=0$ ma takie dwa pierwiastki jednakowych znaków, których suma kwadratów jest nie mniejsza od 3.

(293) Wyznacz te wartości m, dla których równanie $x^2 + mx + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -9$.

(294) Dla jakich wartości m równanie $(m+1)x^2 - (6m-2)x + m + 1 = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > \frac{82}{9}$?

(295) Dla jakich wartości m równanie $x^2 - (m+1)x + m = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = 16$?

(296) Dla jakich wartości m równanie $x^2 - mx - m - 1 = 0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 \geqslant -10$?

(297) Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = (m-4)x^2 - 4x + m - 3$ ma dwa miejsca zerowe, z których jedno jest mniejsze od 1, a drugie większe od 1?

(298) Dla jakich wartości m równanie $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste mniejsze od 4?

(299) Dla jakich wartości m równanie $mx^2 + 2x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste mniejsze od 1?

(300) Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m-3)x + m - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 = 2$.

(301) Wyznacz te wartości m, dla których równanie $x^2 + mx - m - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 5$.

(302) Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = mx^2 - 4x + m$ osiąga wartość największą oraz ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, których suma wynosi $m^2 + 4m - 1$?

(303) Wyznacz wszystkie całkowite wartości m, dla których równanie $x^2 + (m+2)x + m^2 - 7 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że zachodzi nierówność $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 < 3m + 12$.

(304) (MR 2008) Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - (p^2 + q^2)x + (p+q) = 0$ z niewiadomą x. Oblicz wartości p i q.

(305) Wyznacz takie wartości m dla których równanie $x^2 + mx + 3 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1| + |x_2| \leqslant 4$.

(306) (MR 2011) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

(307) (MR 2012) Oblicz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m+2)x + m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$.

(308) (MR 2013) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + 2(1-m)x + m^2 - m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 \cdot x_2 \leqslant 6m \leqslant x_1^2 + x_2^2$.

(309) (MR 2015) Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.

(310) (MR 2016) Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 3$.

(311) (MR 2017) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2 - 6mx + (2m+3)(m-3) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0.$$

(312) (MR 2018) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.

(313) (MR 2020) Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$.

(314) (MR 2021) Wyznacz wszystkie wartości parametru m dla których trójmian kwadratowy $4x^2 - 2(m+1)x + m$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ oraz $x_1 + x_2 \leqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

(315) (MRC 2012) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $2x^2+(3-2m)x-m+1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki $x_1.x_2$ takie, że $|x_1-x_2| = 3$.

(316) (MRC 2013) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(m+1)x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki takie, że ich suma jest nie większa niż $2,5$.

(317) (MRC 2014) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + (2m-5)x + 2m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 + x_2)^2 \geqslant x_1^2 \cdot x_2^2 \geqslant x_1^2 + x_2^2$.

(318) (MRC 2015) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{m^2+m-6}{m-5}x^2-(m-2)x+m-5$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz całkowite wartości parametru m, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

(319) (MRC 2017) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty, 3)$.

(320) (MRC 2018) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leqslant \frac{2}{3}$.

(321) (MRS 2010) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m-4)x + m^2 - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od $2m^3 - 3$.

(322) Dla jakich wartości parametru m równanie $(x - m + 3)(x + 2m - 9) = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $|x_1| + |x_2| = 2$?

(323) Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2(m+2)x + 4m + m^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunek $x_1 = 2x_2$?

5. Wielomiany

(324) Iloczyn trzech liczb całkowitych, z których druga jest o 3 większa od pierwszej, a trzecia o 1 mniejsza od drugiej, jest równy -30. Wyznacz te liczby.

(325) Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest równy 192. Jakie to liczby?

(326) Wyznacz wartość a wiedząc, że liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 12$.

(327) Wyznacz wartości a i b wiedząc, że liczby -1 i -2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$.

(328) Nie wykonując dzielenia sprawdź, dla jakiej wartości m wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - mx + 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

(329) Nie wykonując dzielenia wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$ przez dwumian $x - 2$.

(330) Wyznacz wartość m, dla której reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^4 - 4x^2 + 5x + m$ przez dwumian $x - 1$ wynosi 5.

(331) Dobierz tak wartości a i b, aby reszty z dzielenia wielomianu $W(x) = x^5 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ przez dwumiany $x - 1$ i $x + 3$ wynosiły odpowiednio 6 i -122.

(332) Wyznacz takie wartości a, dla których wielomian $P(x) = ax^3 - (a+3)x^2 + a(a-10)x + 36$ jest podzielny przez dwumian $Q(x) = x - a$.

(333) Wielomian $W(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ jest kwadratem innego wielomianu. Jakiego?

(334) Wyznacz takie wartości m i n, dla których wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 1$ jest kwadratem innego wielomianu.

(335) Liczby -1 i -3 są pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + ax + b$. Wyznacz a i b oraz rozwiąż nierówność $P(x) \leqslant 0$.

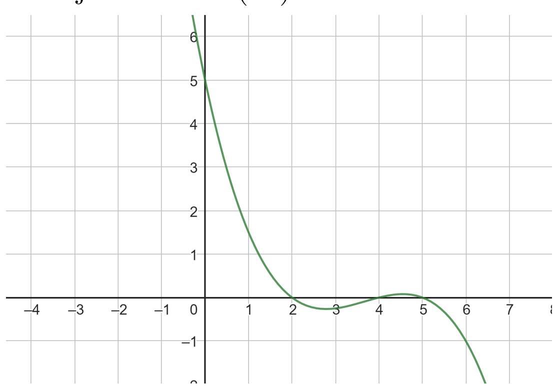
(336) Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = x^3 - bx^2 - 3x + c$ jest 3. Znajdź pozostałe pierwiastki tego wielomianu wiedząc, że $W(-2) = -5$.

(337) Jednym z rozwiązań równania $x^4 + 11x^2 + dx + 30 = 5x^3$ jest 3. Znajdź pozostałe rozwiązania tego równania.

(338) Wielomian trzeciego stopnia $W(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x - 11, x - 13, x - 15$, a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - 10$ jest równa 60. Oblicz $W(14)$.

(339) Wielomian $W(x) = x^3 + bx^2 + cx + 24$ jest podzielny przez dwumian $U(x) = x - 4$, a przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $V(x) = x + 2$ otrzymamy resztę 36. Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x)$.

(340) Dany jest wielomian trzeciego stopnia, którego fragment wykresu jest przedstawiony na rysunku poniżej. Oblicz $W(10)$.



(341) Zapisz wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ jako iloczyn dwóch wielomianów drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych dodatnich.

(342) Dla jakich liczb rzeczywistych c wielomian $W(x) = (x-2)(x^2+2x+c)$ ma trzy różne pierwiastki?

(343) Znajdź te wartości współczynnika b, dla których wielomian $W(x) = x^3+bx^2+x$ ma trzy różne nieujemne pierwiastki.

(344) Znajdź wszystkie takie liczby rzeczywiste b, aby wielomian $W(x) = (x^2+bx+4)(x-1)$ miał trzy różne pierwiastki, których suma jest mniejsza od 9.

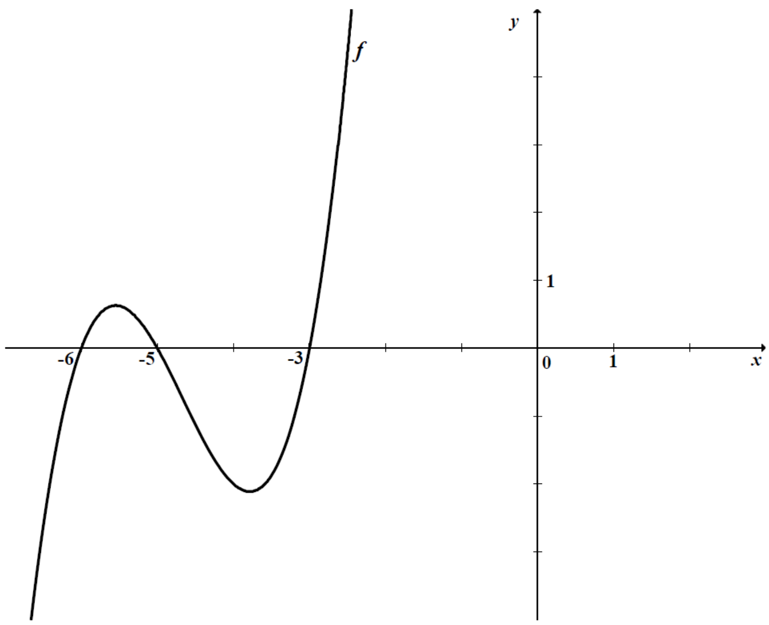
(345) Dla jakich wartości m równanie $(x+2)[(m+1)x^2-4mx+m+1] = 0$ ma trzy różne pierwiastki ujemne?

(346) Wykaż, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3-mx+m-1$ oraz wyznacz wszystkie wartości m, dla których ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

(347) Dla jakich wartości p równanie $(x+1)[x^2+(p+2)x+(p-1)^2] = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie?

(348) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3-mx^2-(m+4)x-(m+2)$ przez dwumian $x-m$ wynosi $-8m^3$. Rozwiąż nierówność $W(x) \geqslant 0$.

(349) (MR 2008) Wielomian trzeciego stopnia f, którego fragment wykresu przedstawiono na poniższym rysunku spełnia warunek $f(0) = 90$. Wielomian g dany jest wzorem $g(x) = x^3-14x^2+63x-90$. Wykaż, że $g(x) = -f(-x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.



(350) (MR 2009) Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 8x^2+4x-14$ oraz resztę $R(x) = -5$. Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

(351) Dla jakich wartości p równanie $(x+3)\left[x^2+(p+4)x+(p+1)^2\right] = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie?

(352) Wyznacz takie wartości a i b, dla których wielomian $W(x) = x^3+6x^2+ax+b$ ma trzy różne pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_2 = 2x_1$ oraz $x_3 = 3x_1$.

(353) Dla jakich wartości m równanie $(x+1)(x^2+2mx+3m^2-2)$ ma dokładnie dwa rozwiązania?

(354) Wyznacz takie wartości m, dla których równanie $(x-1)(x^2-2mx+m^2-9) = 0$ ma trzy różne pierwiastki takie, że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

(355) (MR 2007) Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

(356) (MR 2013) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.

(357) (MR 2014) Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m, dla których równanie $(x^3+2x^2+2x+1)(x^2-(2m+1)x+m^2+m = 0$ ma trzy, parami różne, pierwiastki rzeczywiste, takie że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

(358) (MR 2019) Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3+(m^3+2)x^2-11x-2(2m+1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x+1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leqslant 0$.

(359) (MRC 2012) Wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 24x + 9$ jest kwadratem wielomianu $P(x) = x^2 + cx + d$. Oblicz a oraz b.

(360) (MRC 2013) Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego są liczby 1, 3, 5. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej tego wielomianu jest równy $\frac{1}{2}$. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 24.

(361) (MRC 2014) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 6x^3+(m+4)x^2-2x-1$ przez dwumian $x-m$ jest równa 8. Oblicz wartość m oraz pierwiastki tego wielomianu.

(362) (MRM 2008) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których jedynym rozwiązaniem rzeczywistym równania $x^3 + m^3x^2 - m^2x - 1 = 0$ jest liczba 1.

(363) Wielomian $W(x) = 18x^3 + 27x^2 + 13x + 2$ ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $(0, 1)$. Znajdź wszystkie pierwiastki tego wielomianu.

(364) Dla jakich wartości m równanie $(x - 3)(x^2 - 3mx + 2m^2 + 2m - 3) = 0$ ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste?

(365) Dla jakich wartości m równanie $(x + 1)(x^2 + mx + 2m) = 0$ ma trzy różne rozwiązania x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1x_2x_3 < x_1 + x_2 + x_3 + 3$?

(366) Wielomian $W(x) = 18x^3 - 21x^2 - 13x + 6$ ma pierwiastek w przedziale $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Znajdź wszystkie pierwiastki tego wielomianu.

6. Funkcje wymierne

(367) Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $\frac{x^2+8x+m}{x+3} = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

(368) Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2+bx+c}{x^2+cx+b}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Znajdź miejsca zerowe tej funkcji.

(369) Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = \frac{x^2-2(m-3)x+1}{x^2+3x+m+2}$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x i ma dwa różne miejsca zerowe?

(370) Dla jakich wartości m równanie $\frac{x^2+(3m+1)x+2m^2+2}{x+2} = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

(371) Dany jest układ równań $\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony (ma dokładnie jedno rozwiązanie), a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x + y| < 2$.

7. Działania na potęgach

(372) Wykaż, że jeśli $a = \sqrt{2}^{6-\sqrt{8}}$, a $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{|1-\sqrt{2}|}$, to $a = 4b$.

(373) Udowodnij, że liczba $\left((6 - 11^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + (6 + 11^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right)^2$ jest całkowita.

(374) Wiadomo, że $3^a + 3^{-a} = 7$. Oblicz $9^a + 9^{-a}$ oraz $81^a + 81^{-a}$.

(375) (MR 2009) Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

(376) (MRS 2009) Porównaj liczby a^b i b^a, jeśli $a = \left[(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right]^2$ oraz $b = \frac{81^{-1} \cdot \sqrt{3}}{27^{-2} \cdot \sqrt[4]{9}}$.

(377) W 2000 roku liczba mieszkańców pewnego miasta wynosiła 240 tysięcy. Z każdym kolejnym rokiem wzrastała ona o 5%. Dla każdej liczby całkowitej $t \geqslant 0$ funkcja $L(t)$ określa liczbę mieszkańców tego miasta po upływie t lat. Wyznacz wzór funkcji $L(t)$ oraz oblicz, w którym roku liczba mieszkańców tego miasta przekroczy 300 tysięcy.

(378) Zwierzę *Eraticus* jest zagrożone wyginięciem. Od 1992 r. pozostała tylko jedna kolonia, a w 1992 r. populacja tej kolonii wynosiła 555 osobników. Od tego czasu populacja systematycznie spada o $4,5\%$ rocznie. Znajdź wzór funkcji $L(t)$ opisującej jego populację po t latach od 1992 roku. Oblicz przybliżoną populację tego zwierzęcia w 2007 roku.

(379) Każdego roku fizyk mierzy pozostałą radioaktywność w próbce. Odkrywa, że zmniejsza się ona o 18% każdego roku. Po 4 latach pozostało $1,52$g materiału radioaktywnego. Znajdź początkową ilość materiału radioaktywnego. Po ilu latach ilość materiału radioaktywnego będzie mniejsza niż $0,2$g?

8. Logarytmy

(380) Oblicz wartość wyrażenia $\log_2 8 + \log_{0,7} \frac{100}{49} + \log_{\sqrt{5}} 25$.

(381) Oblicz wartość wyrażenia $\log_6 2 + \log_6 3 + \log_3 270 - \log_3 10$.

(382) Oblicz wartość wyrażenia $\log_3 25 \cdot \log_5 3$.

(383) Oblicz wartość wyrażenia $\log^2 5 + \log^2 2 + 2 \log 5 \log 2$.

(384) Oblicz wartość wyrażenia $\log_{14} 7 \cdot \log_{14} 28 + \log_{14}^2 2$.

(385) Oblicz wartość wyrażenia $9^{\log_3 5} + 8^{\log_2 6 - \frac{2}{3}}$.

(386) Oblicz wartość wyrażenia $\log_2(\log_3 \sqrt{5}) - \log_2(\log_3 5)$

(387) Wiedząc, że $\log_3 2 = a$ oraz $\log_3 5 = b$, oblicz wartości wyrażeń $\log_3 10$; $\log_3 6$; $\log_3(0,4)$; $\log_3 60$; $\log_9(1,5)$ oraz $\log_{50} 20$.

(388) Wiedząc, że $\log_a p = 2$, $\log_b p = 3$ oraz $\log_c p = 6$ oraz $abc \neq 1$, oblicz $\log_{abc} p$.

(389) Niech $m = \log_{21} 7$. Wykaż, że $\log_7 27 = \frac{3(1-m)}{m}$.

(390) Wykaż, że jeśli liczby b i c są dodatnie i $\log_2 b + \log_2 c + 1 = \log_2(b^2 + c^2)$, to $b = c$.

(391) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{16-x^2}(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$.

(392) Oblicz wartość wyrażenia $\log_3(\log_8 10 - \log_8 5)$.

(393) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_5(4-\log_2 2\sqrt{2})}{\log_{25}(6+\log_{0,0081} 0,3)}$.

(394) Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$, $k > 1$ zachodzi równość

$$\log_{ab} k^3 = \log_{a^2} k + \log_b k.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $\log_a b$.

(395) (MR 2005) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$

(396) (MR 2021) Niech $\log_2 18 = c$. Wykaż, że $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$.

(397) (MRC 2015) Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

9. Trygonometria

(398) Wiedząc, że $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ oraz $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ oblicz wartości $\sin\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

(399) Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ oraz $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ oblicz wartości $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$.

(400) Mając dane $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ oblicz $\sin^3 x + \cos^3 x$

(401) Udowodnij tożsamość $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$

(402) Udowodnij tożsamość $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)$

(403) Udowodnij tożsamość $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha$

(404) Udowodnij tożsamość $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$

(405) Udowodnij tożsamość $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

(406) Oblicz wartość $\sin 15°$

(407) Oblicz wartość $\cos 105°$

(408) Wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}$ oblicz $\cos 2x$

(409) Wiedząc, że $\sin x = \frac{24}{25}$ oraz $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ oblicz $\sin 2x$

(410) Udowodnij tożsamość $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

(411) Wiedząc, że $\sin x + \cos x = m$, oblicz wartości wyrażeń $\sin 2x$, $|\cos x - \sin x|$, $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\sin^3 x + \cos^3 x$.

(412) Rozwiąż równanie $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(413) Rozwiąż równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$

(414) Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

(415) Rozwiąż równanie $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

(416) Rozwiąż równanie $|\sin x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

(417) Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

(418) Rozwiąż równanie $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

(419) Rozwiąż równanie $2\cos^4 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$

(420) Rozwiąż równanie $\sin 2x + \sin x = 0$

(421) Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x = 0$

(422) Rozwiąż równanie $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

(423) Rozwiąż równanie $\operatorname{tg}(0,5x - \frac{\pi}{4}) = -1$ w przedziale $\langle 0, 4\pi\rangle$

(424) Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

(425) Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - \sin 2x = 0$

(426) Rozwiąż równanie $\sin(x - \frac{\pi}{12})\cos(x + \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{4}$

(427) Rozwiąż równanie $2\sin x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$

(428) Rozwiąż równanie $\sin x\cos x + \operatorname{tg} x = 2,5\sin x$

(429) Rozwiąż równanie $\sin x - \cos x + 1 = \sin x\cos x$

(430) Rozwiąż równanie $\sin x\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = \operatorname{tg} x - \sqrt{3}\sin x$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

(431) Rozwiąż równanie $(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x})^2 + (\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x})^2 = 14$

(432) Rozwiąż równanie $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{8\sin 2x}{3}$

(433) Rozwiąż równanie $\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{1-\sin x}{\cos x} = 4$

(434) Rozwiąż równanie $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$

(435) Rozwiąż równanie $\cos 2x + \sin 2x + 1 = 0$

(436) Rozwiąż równanie $\sqrt{2}\cos 2x = \cos x + \sin x$

(437) Rozwiąż równanie $\sin^2 8x - \sin^2 4x = -1$

(438) Rozwiąż równanie $1 - \operatorname{tg}x = \cos 2x$

(439) Rozwiąż równanie $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$

(440) Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz $\sin 3\alpha$.

(441) Rozwiąż równanie $\cos x - \sin x = \cos 2x$ jeśli $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
(442) (MR 2005) Rozwiąż równanie $\cos 3 - \sqrt{3}\sin x = 1$
(443) (MR 2008) Rozwiąż równanie $4\cos^2 x = 4\sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(444) (MR 2011) Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(445) (MR 2012) Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.
(446) (MR 2013) Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
(447) (MR 2014) Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(448) (MR 2017) Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(449) (MR 2018) Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.
(450) (MR 2019) Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$.
(451) (MR 2020) Rozwiąż równanie $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$.
(452) (MR 2021) Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.
(453) (MRC 2012) Kąt α jest taki, że $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$
(454) (MRC 2013) Rozwiąż równanie $2\mathrm{tg}x \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + \mathrm{tg}x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(455) (MRC 2013) Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest tożsamość $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1+\cos^2 2\alpha}{2}$.
(456) (MRC 2015) Rozwiąż równanie $(4\sin^2 x - 1)\cdot\sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$ dla $x \in (-\pi, 0)$.
(457) (MRC 2017) Rozwiąż równanie $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(458) (MRG 2014) Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.
(459) (MRL 2006) Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x = \cos x$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(460) (MRS 2010) Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$.
(461) Rozwiąż równanie $4\cos 2x\cos 5x = 2\cos 7x + 1$.
(462) (MRS 2023) Rozwiąż równanie $3\sin^2 x - \sin^2(2x) = 0$ w przedziale $\langle \pi, 2\pi\rangle$.

10. Ciągi

(463) Ciąg (a_n) dla $n \geqslant 1$ jest określony wzorem $a_n = 4n - n^2$. Oblicz wyrazy a_3 oraz a_{n+1}. Który wyraz tego ciągu jest równy -21?

(464) Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = 2n^2 + 3n$.

(465) Zbadaj monotoniczność ciągu $b_n = \frac{3n+5}{n+1}$

(466) Suma n początkowych wyrazów ciągu a_n dana jest wzorem $S_n = n^3 - 3n$. Oblicz a_1, a_2, a_3, a_{10} oraz a_n.

(467) Suma n początkowych wyrazów ciągu a_n dana jest wzorem $S_n = n^3 - 4n^2$. Który wyraz ciągu a_n jest równy 47?

(468) W ciągu arytmetycznym dane są $a_1 + a_3 = 14$ oraz $a_2 \cdot a_4 = 21$. Oblicz a_1, r oraz a_8.

(469) Suma n początkowych wyrazów ciągu a_n wyraża się wzorem $S_n = 4n^2 - 3n$. Wyznacz wzór ogólny ciągu a_n, wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny oraz rozstrzygnij, ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 100.

(470) Siódmy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 10. Oblicz $a_4 + a_8 + a_9$ oraz S_{13}.

(471) Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 4n-3$ należy zsumować, aby otrzymać 231?

(472) Oblicz sumę wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 3.

(473) Oblicz sumę $2 + 7 + 12 + 17 + \cdots + 112$.

(474) Oblicz sumę wszystkich dodatnich, mniejszych od 100 liczb całkowitych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1.

(475) Ile początkowych liczb całkowitych dodatnich parzystych należy zsumować, aby otrzymać 156?

(476) Dla jakich wartości x liczby $x - 1$, $2x - 3$, $x^2 - 9$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny?

(477) Ciąg $(x, 2x + 3, 4x + 1, ...)$ jest arytmetyczny. Wyznacz wartość x oraz sumę 10 początkowych wyrazów tego ciągu.

(478) W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 - a_3 = 24$ oraz $a_1 + a_2 = 36$. Oblicz a_1, q oraz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

(479) W niemonotonicznym ciągu geometrycznym (a_n) dane są a_1a_5=100 oraz $a_3 + a_4 = 30$. Oblicz a_5.

(480) Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych wynosi 3, a suma wszystkich wyrazów o numerach parzystych 12. Oblicz iloraz tego ciągu.

(481) Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny a suma jego wyrazów to 33. Ciąg $(a, b-1, c+3)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

(482) Ciąg (a, b, c) jest geometryczny a suma jego wyrazów to 19. Ciąg $(a, b, c-1)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c.

(483) Ciąg (a, b, c) jest geometryczny $(a \neq 0)$. Ciąg $(a, b, c - 2)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(a + 1, b, c - 2)$ jest znów geometryczny. Oblicz a, b, c.

(484) Ciąg (a, b, c) jest geometryczny o ilorazie różnym od 1. Ciąg (b, a, c) jest arytmetyczny, a ciąg $(b + 5, a, c - 4)$ jest znów geometryczny. Oblicz a, b, c.

(485) Suma dwóch początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 15, a suma trzech 19. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

(486) W nieskończonym ciągu geometrycznym każdy następny wyraz jest dwukrotnie mniejszy od poprzedniego. Wykaż, że suma wszystkich wyrazów jest 4 razy większa od wyrazu drugiego.

(487) Wyznacz tak liczby a i b, żeby trzy różne pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ utworzyły ciąg arytmetyczny o różnicy 2.

(488) Wyznacz tak liczby a i b, żeby trzy różne pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 13x^2 + ax + b$ utworzyły ciąg geometryczny o ilorazie 3.

(489) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-6n}{2n+1}$

(490) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n+7}{n^3-2n^2+n+2}$

(491) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-2n)^2}{n^2+1}$

(492) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{36n^4+17n^3+3}}{(2n+1)(5-n)}$

(493) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+6}{100n+1}$

(494) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4+\sqrt{3}n}{3n^2+5}$

(495) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} -n^3 + 4n^2 + 5n - 3$

(496) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+4}$

(497) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+5+8+\cdots+3n-1}{-4-6-8-\cdots-(2n+2)}$

(498) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n-1} - \frac{n^3-n^2}{n^2+n+1}$

(499) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny a suma ich kwadratów wynosi 91. Jeżeli do pierwszej liczby dodamy 2, do drugiej 5 a do trzeciej 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Jakie to liczby?

(500) Liczba wyrazów pewnego ciągu geometrycznego jest parzysta. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest trzy razy większa od sumy jego wyrazów o numerach nieparzystych. Wyznacz iloraz tego ciągu.

(501) Trzy różne liczby a, b, c, których suma wynosi 38, tworzą w podanej kolejności trzywyrazowy ciąg geometryczny. Liczby te są odpowiednio pierwszym, trzecim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

(502) Suma wszystkich wyrazów szeregu geometrycznego zbieżnego jest 4 razy większa od sumy wszystkich jego wyrazów o numerach parzystych, a pierwszy wyraz jest o 2 większy od wyrazu drugiego. Wyznacz ten drugi wyraz.

(503) (MR 2009) Ciąg $(x-3, x+3, 6x+2, ...)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

(504) W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_2 = 6$ oraz $\frac{a_{11}+a_8}{a_8} = 28$. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

(505) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, którego iloraz q jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$. Stosunek sumy S_N wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy S_P wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy sumie S wszystkich wyrazów tego ciągu tj. $\frac{S_N}{S_P} = S$ Oblicz q.

(506) Średnia arytmetyczna dziewięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 10. Wyrazy a_2, a_3, a_7 tworzą w podanej kolejności trzywyrazowy ciąg geometryczny. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego.

(507) (MP 2020) Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie. Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Oblicz iloraz q tego ciągu należący do przedziału $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

(508) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, którego iloraz q spełnia warunki $q = \frac{1}{3}a_1$ oraz $|q| < 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa sumie kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu. Oblicz q.

(509) (MR 2005) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}$.

(510) (MR 2007) Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{100}$ oraz oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2-2}$.

(511) (MR 2008) Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

(512) (MR 2012) Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

(513) (MR 2013) Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$, natomiast ciąg $(a - 1, b + 5, c + 19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

(514) (MR 2014) Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych. Oblicz iloraz q tego ciągu.

(515) (MR 2015) Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a, b i c. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

(516) (MR 2016) Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geqslant 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ jest zbieżny.

(517) (MR 2017) Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c.

(518) (MR 2018) Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

(519) (MR 2019) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1} - \frac{n^2}{3n^2+1}$.

(520) (MR 2019) Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

(521) (MR 2020) W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1+a_2+a_3 = \frac{21}{4}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1.

(522) (MR 2021) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2-(1-2n)^2}{(2n-1)^2}$.

(523) (MRC 2012) W ciągu arytmetycznym a_n, dla $n \geqslant 1$, dane są $a_1 = -2$ oraz różnica $r = 3$. Oblicz największe n takie, że $a_1 + a_2 + ... + a_n < 2012$.

(524) (MRC 2013) Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od 1. Jeżeli weźmiemy kolejno drugą z nich, pierwszą i trzecią, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Jeżeli pierwszy wyraz tego ciągu arytmetycznego zmniejszymy o 7, drugi pozostawimy bez zmian, a trzeci zwiększymy o 3, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz te liczby.

(525) (MRC 2016) Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geqslant 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu a_n i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

(526) (MRC 2017) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

(527) (MRC 2017) Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

(528) (MRC 2018) Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2), którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

(529) (MRG 2014) Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$.

(530) (MRG 2014) Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$, dla $n \geqslant 1$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu P_n.

(531) (MRL 2006) Wyznacz wszystkie wartości $k \in \mathbb{R}$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12)(x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

(532) (MRM 2008) Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3^{1-n}$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz iloraz tego ciągu oraz oblicz $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + ... + \log_3 a_{100}$ czyli sumę logarytmów, o podstawie 3, stu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

(533) (MRS 2006) Dany jest nieskończony ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak tworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość $a (a > 0)$.

(534) (MRS 2010) Ciąg (a, b, c) jest geometryczny i $a + b + c = 26$, zaś ciąg $(a - 5, b - 4, c - 11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c.

(535) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) dla $n \geqslant 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 27, a suma trzech początkowych wyrazów jest równa 19. Oblicz pierwszy wyraz a_1 oraz iloraz q tego ciągu.

(536) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) dla $n \geqslant 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 10, a drugi wyraz wynosi $\frac{8}{5}$. Oblicz iloraz q tego ciągu.

(537) Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$(3 - x) + x(3 - x) + x^2(3 - x) + ...$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 3), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{5}{2x}$.

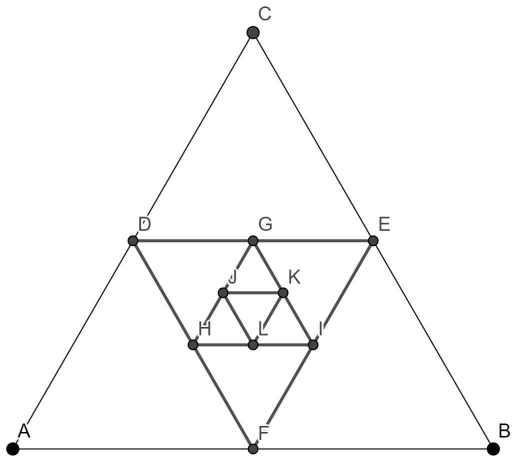
(538) Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$8x + 16 + \frac{32}{x} + \frac{64}{x^2} + ...$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa 72.

(539) Dany jest kwadrat k_0 o wierzchołkach A, B, C i D oraz boku długości a. Środki A_1, B_1, C_1, D_1 boków AB, BC, CD i DA tego kwadratu są wierzchołkami kwadratu k_1. Środki boków kwadratu k_1 są wierzchołkami kwadratu k_2 i rak dalej. W ten sposób otrzymujemy nieskończony ciąg kwadratów. Oblicz sumę pól oraz sumę obwodów tych wszystkich kwadratów.

(540) Dany jest nieskończony ciąg trójkątów równobocznych, z których każdy następny powstaje poprzez połączenie środków boków poprzedniego trójkąta (zobacz rysunek)



Długość boku trójkąta ABC jest równa 6. Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów.

(541) Ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$ spełnia warunki: $\begin{cases} a_3 + a_6 = 108 \\ a_4 + a_7 = 216 \end{cases}$.

Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

(542) W rosnącym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich zachodzi związek $3a_3 + 3a_1 = 10a_2$. Czwarty wyraz a_4 tego ciągu jest równy 27. Suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 3280. Oblicz n.

11. Planimetria

W dowolnym trójkącie ABC (o ile treść zadania nie stanowi inaczej) przyjmujemy oznaczenia: boki - $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$, kąty naprzeciwko boków a, b, c to odpowiednio α, β, γ, wysokości opuszczone na te boki to odpowiednio h_a, h_b i h_c. Promień okręgu wpisanego w trójkąt - r, zaś opisanego na trójkącie - R.

(543) W trójkącie prostokątnym ABC dane są $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ oraz $|BC| = 4$. Oblicz długości boków AC, AB oraz długość wysokości BD tego trójkąta.

(544) W trójkącie prostokątnym ABC dane są $c = 26$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

(545) W trójkącie równoramiennym dane są $|AB| = 30$, a $|AC| = |BC| = 25$. Oblicz pole tego trójkąta, długość wysokości AD i długości odcinków, na jakie dzieli ona bok BC.

(546) W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dane są $|AB| = 13$ oraz wysokość $|AD| = 12$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

(547) W trójkącie dane są $a = 8, b = 3, \gamma = 60°$. Oblicz pole tego trójkąta, długość boku c oraz wysokość h_b.

(548) W trójkącie dane są $a = 3, b = 5, c = 7$. Oblicz miarę największego kąta w tym trójkącie.

(549) Na ramieniu BC trójkąta równoramiennego ABC obrano punkt D, który podzielił to ramię w stosunku $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Ponadto $|AB| = 12$ oraz $|AC| = 24$. Oblicz długość odcinka AD.

(550) W trójkącie dane są $a = 21, b = 20, c = 13$. Oblicz pole tego trójkąta, promień okręgu wpisanego, promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz wysokość h_a.

(551) W trójkącie dane są $a = \sqrt{6}$, $\beta = 60°$ oraz $\gamma = 75°$. Oblicz długość b.

(552) W trójkącie dane są $a = 4$, $\alpha = 30°$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

(553) W trójkącie dane są $|AB| = 8, |AC| = 9, |BC| = 7$. Oblicz długość d środkowej CD.

(554) W trójkącie dane są $|AC| = 10, |BC| = 15, |\sphericalangle ACB| = 120°$. Oblicz długość dwusiecznej CD kąta ACB.

(555) W równoramiennym trójkącie prostokątnym poprowadzono środkowe do ramion tego trójkąta. Oblicz kosinus kąta ostrego między tymi środkowymi.

(556) W trójkącie prostokątnym dane są długości przyprostokątnych $a = 6$ oraz $b = 8$. Oblicz długość wysokości h_c, promienia okręgu opisanego na tym trójkącie i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

(557) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 3 i 4. Wpisujemy okrąg w ten trójkąt. Oblicz długości boków, na jakie podzielił przeciwprostokątną punkt styczności tego okręgu z nią.

(558) W trójkącie prostokątnym najkrótszy bok ma długość $1 + \sqrt{3}$ a najmniejszy kąt miarę $30°$. Oblicz długość odcinka łączącego punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną z wierzchołkiem kąta prostego w tym trójkącie.

(559) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 15 i 20. Oblicz odległości środka okręgu wpisanego w ten trójkąt od wszystkich wierzchołków tego trójkąta.

(560) Oblicz długość podstawy trójkąta równoramiennego ABC wiedząc, że jego ramię ma długość 16 i że odległość środka ramienia od przeciwległego wierzchołka podstawy wynosi 12.

(561) W trójkącie ABC dane są długości $|AC| = 3$ oraz $|BC| = 7$. Dwusieczna kąta przy wierzchołku C ma długość równą 3. Wyznacz długość boku AB.

(562) W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB ramię jest 2 razy dłuższe od podstawy. Oblicz stosunek pól figur, na jakie symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC.

(563) W trójkącie prostokątnym sinus jednego z kątów jest równy $\frac{3}{5}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 7. Oblicz pole tego trójkąta.

(564) W trójkącie prostokątnym suma sinusów kątów ostrych wynosi $\frac{3}{\sqrt{5}}$, a pole tego trójkąta jest równe 20. Oblicz długość jego przeciwprostokątnej.

(565) Wysokość AD opuszczona na przeciwprostokątną BC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 24, a stosunek długości przeciwprostokątnej do obwodu tego trójkąta wynosi$\frac{5}{12}$. Oblicz pole trójkąta ABC.

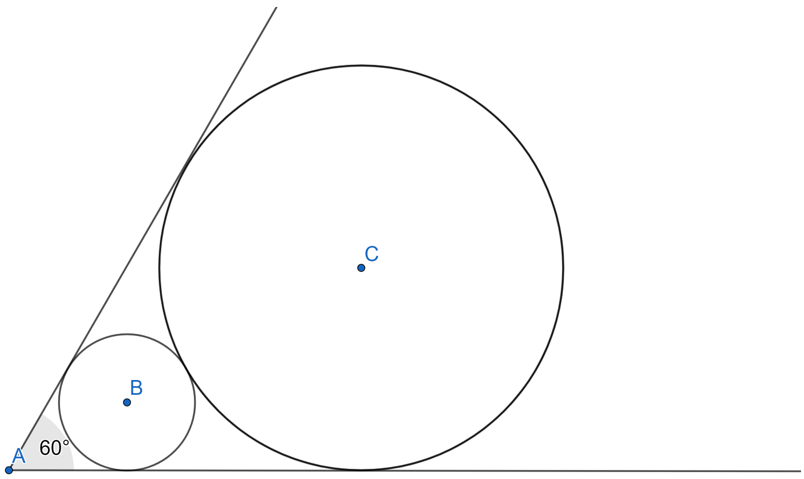
(566) W trójkącie prostokątnym dane są: $r = 6$ i $R = 17$. Oblicz jego pole.

(567) Pole trójkąta prostokątnego jest równe 180, a $r = 4$. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

(568) Oblicz pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze $120°$.

(569) W wycinek koła o promieniu 4 i kącie $90°$ wpisano koło. Oblicz promień tego koła.

(570) W kąt o mierze $60°$ wpisano dwa okręgi jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że promień okręgu o środku B ma długość 1, oblicz promień okręgu o środku C.



(571) Romb o kącie ostrym $30°$ jest opisany na okręgu o promieniu 2. Oblicz pole tego rombu.

(572) W równoległoboku $ABCD$ wysokość opuszczona na bok AB ma długość 2, a na bok BC- długość 3. Oblicz obwód tego równoległoboku wiedząc, że długości boków różnią się o 2.

(573) Oblicz sinus kąta ostrego przecięcia się przekątnych w prostokącie, którego boki mają długości 6 i 8.

(574) Dwa boki równoległoboku są równe 6 i 10, a dłuższa przekątna 14. Oblicz miarę kąta ostrego tego równoległoboku i długość krótszej przekątnej.

(575) Znając długości przekątnych równoległoboku $d_1 = 6$ i $d_2 = 4$ oraz bok $a = 3$, oblicz drugi bok oraz pole tego równoległoboku.

(576) Oblicz pole trapezu równoramiennego $ABCD$ wiedząc, że jego wysokość $|CE| = h$, a $|AE| = d$.

(577) Obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu o promieniu 4 jest równy 40. Znajdź pole tego trapezu, długości podstaw i długość przekątnej.

(578) Obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu jest równy 16, a przekątna trapezu ma długość 5. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez i promienia okręgu opisanego na nim.

(579) W trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej $\sqrt{41}$ można wpisać okrąg. Oblicz wysokość tego trapezu a następnie odległości punktu przecięcia przekątnych od wszystkich boków tego trapezu.

(580) Trapez, w którym ramię ma długość 5, wpisano w okrąg o promieniu 6,5. Oblicz pole tego trapezu wiedząc, że dłuższa podstawa jest średnicą tego okręgu.

(581) W trapez prostokątny wpisano okrąg. Odległości środka tego okręgu od końców dłuższego ramienia trapezu wynoszą odpowiednio $\sqrt{5}$ oraz $2\sqrt{5}$. Oblicz promień okręgu.

(582) W trapez prostokątny wpisano koło. Punkt styczności koła z dłuższym ramieniem dzieli to ramię na odcinki długości 8 i 18. Oblicz pole koła, długości podstaw trapezu oraz pole tego trapezu.

(583) Cztery kolejne boki czworokąta wpisanego w okrąg mają długości $|AB| = 3, |BC| = 8, |CD| = 6$ i $|DA| = 10$. Oblicz długości przekątnych tego czworokąta.

(584) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wiedząc, że $|AB| = 5$, $|BC| = 8$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, oblicz długość przekątnej AC oraz promień okręgu opisanego na tym czworokącie. Wiedząc dodatkowo, że $|AD| : |DC| = 5 : 3$ oblicz obwód czworokąta $ABCD$.

(585) Ramiona trapezu opisanego na okręgu mają długości 3 i 5. Odcinek łączący środki ramion dzieli trapez na dwie figury, których stosunek pól wynosi 5:11. Oblicz długości podstaw trapezu.

(586) W trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 2, wpisano kwadrat tak, że jeden bok kwadratu zawiera się w boku trójkąta, a dwa wierzchołki przeciwległego boku kwadratu zawierają się w pozostałych bokach trójkąta. Oblicz długość boku tego kwadratu.

(587) W prostokącie $ABCD$, w którym stosunek długości boków AB i BC jest równy 4:3, poprowadzono dwusieczne kątów ADB i BDC. Dwusieczne te przecinają boki AB i BC odpowiednio w punktach K i M. Oblicz stosunek pola prostokąta $ABCD$ do pola trójkąta DKM.

(588) W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 12 wpisano kwadrat tak, że dwa boki kwadratu zawierają się w przyprostokątnych. Oblicz długość boku tego kwadratu.

(589) W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki o długościach 4 i 9. Oblicz długość tej wysokości.

(590) W trójkącie dwie środkowe mają długości odpowiednio 9 i 12. Środkowe te są prostopadłe. Oblicz obwód tego trójkąta.

(591) Na okręgu o promieniu 2 opisano trapez równoramienny o polu 20. Oblicz długości boków tego trapezu.

(592) Ile wynosi miara kąta wewnętrznego 15-kąta foremnego?

(593) Miara kąta wewnętrznego w n-kącie foremnym jest o 3° mniejsza, niż miara kąta wewnętrznego w $(n + 4)$-kącie foremnym. Oblicz n.

(594) Oblicz długość wysokości rombu, którego przekątne mają długości 30 i 40.

(595) W romb o boku długości 4 i kącie ostrym 60° wpisano okrąg. Oblicz pole prostokąta, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami rombu.

(596) Na okręgu o promieniu r opisano trapez prostokątny. Długość najkrótszego z boków tego trapezu wynosi $\frac{5}{4}r$. Oblicz pole trapezu.

(597) W trójkącie prostokątnym długość promienia okręgu wpisanego stanowi $\frac{2}{5}$ długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz sinus najmniejszego kąta w tym trójkącie.

(598) W trójkącie ABC dane są $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 15°$. Kąty trójkąta DEF mają miary $30°, 60°$ oraz $90°$. Trójkąty ABC i DEF mają równe pola. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt DEF.

(599) Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraź pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.

(600) W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, poprowadzono dwusieczną kąta BAC, która przecięła bok BC w punkcie D oraz $|CD| = 32$ i $|BD| = 24$. Oblicz długość podstawy AB oraz długości $|AE|$ i $|BE|$, gdzie DE jest wysokością trójkąta ABD.

(601) (MR 2006) Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu i oblicz kosinus $|\sphericalangle CBD|$.

(602) (MR 2007) Dany jest trójkąt o bokach długości $1, \frac{3}{2}, 2$. Oblicz kosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

(603) (MR 2007) Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

(604) (MR 2008) W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $|BC| = 9$, $|CA| = 12$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że odcinki BC i CD mają równe długości. Oblicz długość odcinka AD.

(605) (MR 2011) Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

(606) (MR 2012) Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $BC = b$ i $a > b$ Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD. Wyraź pole trójkąta AED za pomocą a i b.

(607) (MR 2013) Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC.

(608) (MR 2015) Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2, |BC| = 3, |CD| = 4, |DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

(609) (MR 2019) Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16, |AD| = 6, |CD| = 14i|BC| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

(610) (MR 2020) W trójkącie ABC bok AB jest 3 razy dłuższy od boku AC, a długość boku BC stanowi $\frac{4}{5}$ długości boku AB. Oblicz kosinus najmniejszego kąta trójkąta ABC.

(611) (MR 2021) Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest pięć razy krótszy od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Oblicz sinus tego z kątów ostrych trójkąta ABC, który ma większą miarę.

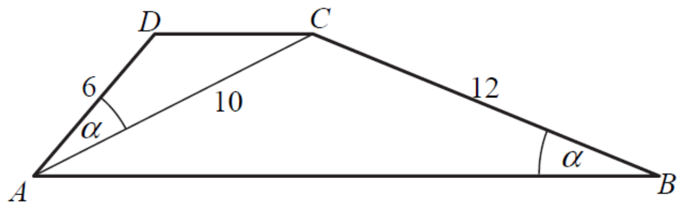
(612) (MRC 2012) W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków: $|AB| = 24, |CD| = 15, |AD| = 7$. Ponadto kąty DAB oraz BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta oraz długości jego przekątnych.

(613) (MRC 2013) W równoległoboku $ABCD$ miara kąta ostrego jest równa 30°, a odległości punktu przecięcia się przekątnych od sąsiednich boków równoległoboku są równe 2 i $\sqrt{3}$. Oblicz długość krótszej przekątnej tego równoległoboku.

(614) (MRC 2014) W czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 5\sqrt{3}$ i $|CD| = 6$, można wpisać okrąg. Przekątna BD tworzy z bokiem AB czworokąta kąt o mierze 60° , natomiast z bokiem AD tworzy kąt, którego sinus jest równy $\frac{3}{4}$. Wyznacz długości boków AB i BC oraz długość przekątnej BD tego czworokąta.

(615) (MRC 2015) W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

(616) (MRC 2016) W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są: $|AD| = 6, |BC| = 12, |AC| = 10$ oraz $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD|$ (zobacz rysunek).



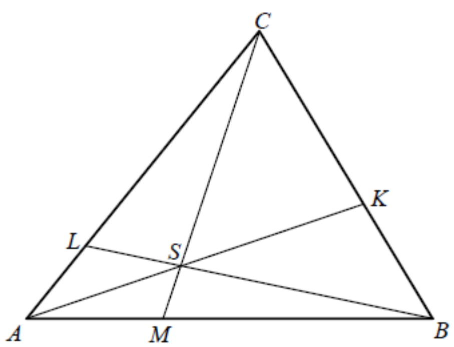
Oblicz długość podstawy AB tego trapezu.

(617) (MRC 2016) W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz kosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

(618) (MRC 2017) Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP.

(619) (MRC 2018) Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10, a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD. Oblicz pole tego trapezu.

(620) (MRG 2013) Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek).



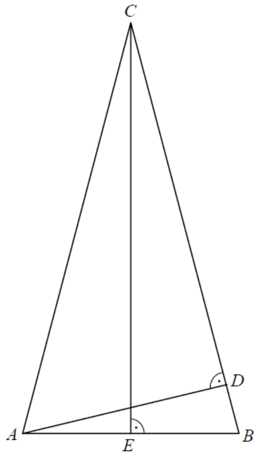
Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS.

(621) (MRG 2014) Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5. Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta.

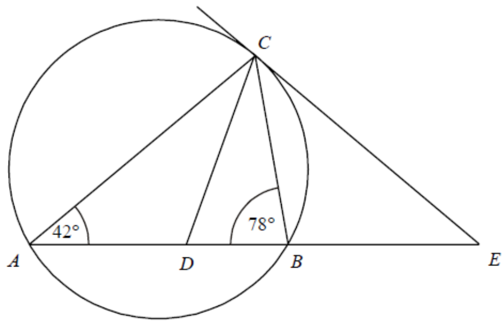
(622) (MRL 2006) Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle BCA| = 90°$ i $|\sphericalangle CAB| = 30°$, jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną.

(623) (MRM 2008) W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są: $|AB| = 2, |BC| = 3, |CD| = 3, |DA| = 4$. i $|\sphericalangle DAB| = 60°$. Oblicz pole tego czworokąta.

(624) (MRM 2008) W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$ wysokość CE jest dwa razy dłuższa od wysokości AD (patrz rysunek). Oblicz kosinusy wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta ABC.



(625) (MRS 2010) Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB trójkąta ABC. Kąty trójkąta ABC mają miary: $|\sphericalangle CAB| = 42°, |\sphericalangle ABC| = 78°$. Styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie C przecina prostą AB w punkcie E (zobacz rysunek). Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów trójkąta CDE.



12. Dowody planimetryczne

(626) Wykaż, że jeżeli między kątami trójkąta zachodzi zależność $\cos\alpha = \frac{1-\cos\gamma}{2\cos\beta}$, to trójkąt jest równoramienny.

(627) Uzasadnij, że w trapezie $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ dwusieczne kątów ABC i BCD są prostopadłe.

(628) Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Wykaż, że trójkąt SBC jest prostokątny

(629) W trapezie równoramiennym $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$ poprowadzono wysokość DE. W ten trapez można wpisać okrąg. Wykaż, że $|AE|^2 + |BD|^2 = \frac{1}{8}k^2$, gdzie k jest obwodem trapezu $ABCD$.

(630) Dłuższa podstawa trapezu prostokątnego ma długość a, krótsza zaś b. Wykaż, że odległość punktu przecięcia przekątnych od krótszego ramienia jest równa $\frac{ab}{a+b}$.

(631) Odcinki AK i BL są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt S jest punktem ich przecięcia. Uzasadnij, że na czworokącie $CLKS$ można opisać okrąg oraz wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ABC i ABS mają promienie równej długości.

(632) Punkt S jest środkiem boku AD równoległoboku $ABCD$. Odcinek BS przecina przekątną AC w punkcie P. Uzasadnij, że pole trójkąta APS jest 4 razy mniejsze od pola trójkąta PBC.

(633) Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na krótszym łuku AB tego okręgu zaznaczono punkt P. Wykaż, że $|AP| + |PB| = |PC|$.

(634) Punkt D leży na zewnątrz okręgu o środku O. Prosta CD jest styczna do tego okręgu w punkcie C, a inna prosta przechodząca przez punkt D przecina ten okrąg w punktach A i B tak, że $|AD| > |BD|$. Wykaż, że jeżeli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.

(635) Na bokach AD i DC kwadratu $ABCD$ obrano punkty P i Q w ten sposób, że $|PD| = 2|AP|$ i $|QC| = |QD|$. Udowodnij, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPQ$.

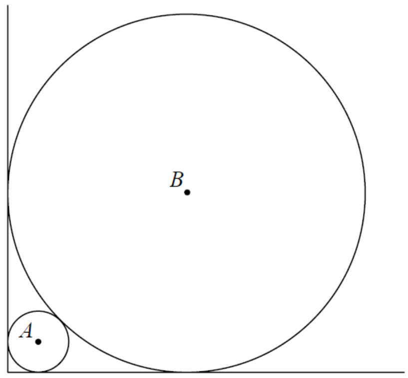
(636) W równoległoboku $ABCD$ obrano na boku BC punkt F. Prosta AF przecina przekątną BD w punkcie E a prostą DC w punkcie G. Udowodnij, że $|AE|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

(637) S jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu $ABCD$ o boku a, a E - środkiem boku AB. W trójkąt DSC wpisano kwadrat $OPQR$ (odcinek OP zawiera się w odcinku CD). Wykaż, że pole kwadratu $OPQR$ wynosi $\frac{a^2}{9}$ oraz oblicz sinus kąta QER.

(638) Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to długość środkowej poprowadzonej do boku c wynosi $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

(639) Trapez równoramienny o podstawach a i b i ramieniu c jest opisany na okręgu oraz wpisany w okrąg o promieniu R. Wykaż, że $2R = \frac{dc}{h}$ gdzie d jest długością przekątnej trapezu a h jego wysokością oraz udowodnij, że $ab = \frac{c^4}{4R^2 - c^2}$.

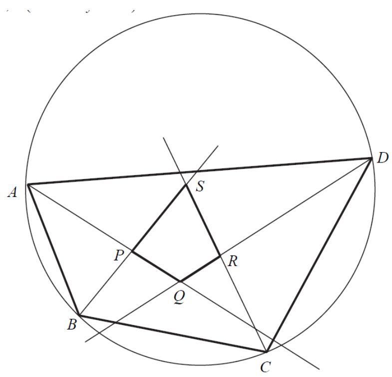
(640) (MR 2009) Dwa okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion tego samego kąta prostego (patrz rysunek). Udowodnij, że stosunek promienia większego z tych okręgów do promienia mniejszego jest równy $3 + 2\sqrt{2}$.



(641) (MR 2013) Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r. Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

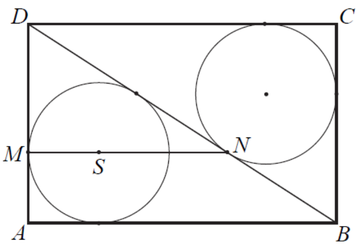
(642) (MR 2014) Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S. Kąty wewnętrzne CAB, ABC i BCA tego trójkąta są równe, odpowiednio, $\alpha, 2\alpha$ i 4α . Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

(643) (MR 2015) Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: P, Q, R, S (zobacz rysunek).



Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.

(644) (MR 2016) Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku.

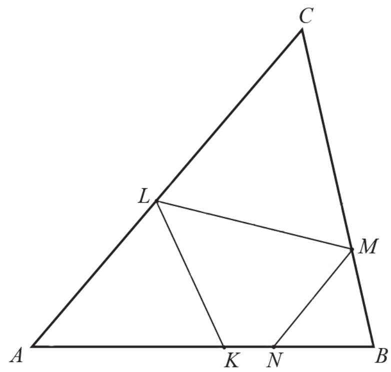


Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

(645) (MR 2017) W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| =$ ß. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E. Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

(646) (MR 2018) Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC| > |BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K. Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC, punkt M jest obrazem

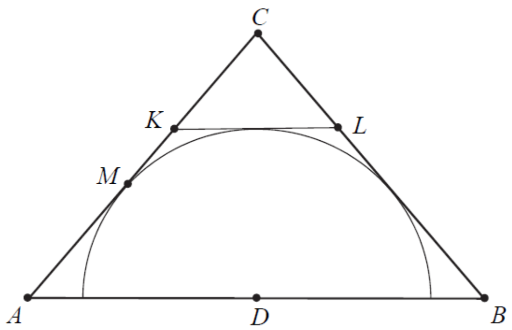
punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB, a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

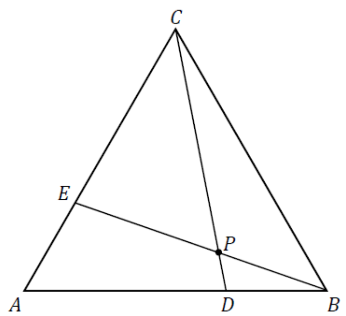
(647) (MR 2019) Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N, w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T. Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

(648) (MR 2020) Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|KC| = |LC| = 2$ (zobacz rysunek).



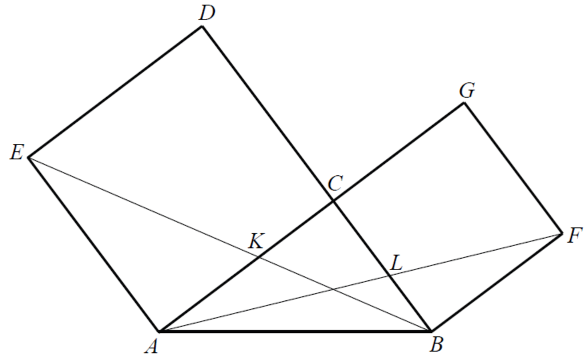
Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

(649) (MR 2021) Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio – D i E takie, że $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).

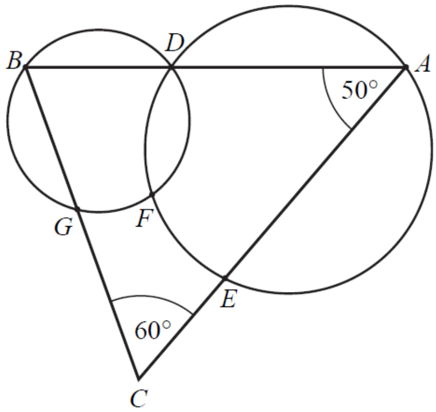


Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

(650) (MRC 2014) Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, kwadraty $ACDE$ i $BFGC$. Odcinek AF przecina przyprostokątną BC w punkcie L, a odcinek BE przecina przyprostokątną AC w punkcie K (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|KC| = |LC|$.

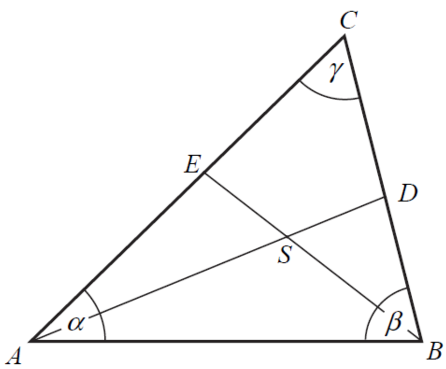


(651) (MRC 2015) W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę $50°$, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę $60°$. Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B, przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G.



Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

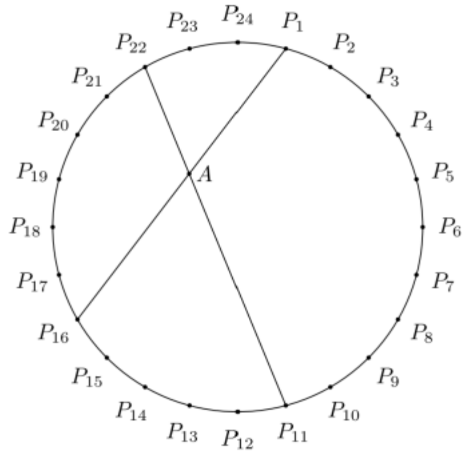
(652) (MRC 2017) Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $ß = |\sphericalangle ABC|$ i $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $\alpha + ß = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

(653) (MRC 2018) W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC. Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.

(654) (MRG 2013) Punkty $P_1, P_2, P_3, ..., P_{23}, P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16}.

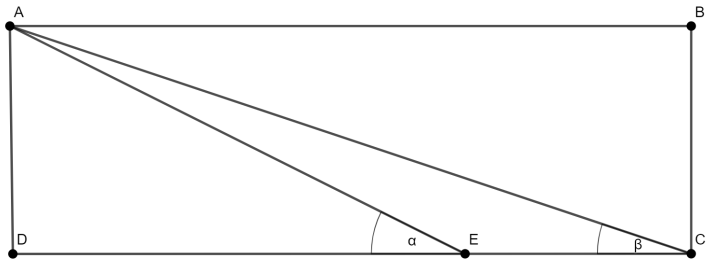


Wykaż, że $\sphericalangle P_{16}AP_{11} = 60°$.

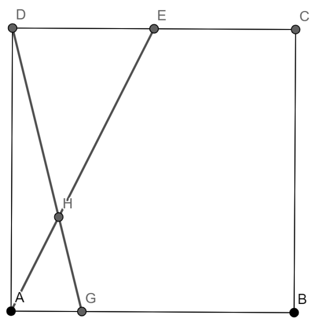
(655) (MRG 2014) Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma$, to $\cos\gamma < 0$.

(656) (MRG 2014) Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $|AB| > |BC|$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $\sphericalangle AEF = 90 * \circ$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$.

(657) W prostokącie $ABCD$ punkt E dzieli bok CD tak, że $|DE| = 2|EC|$ oraz $|EC| = |CB|$. Wykaż, że $\alpha + \beta = 45°$.



(658) Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku a. Punkt E jest środkiem boku CD, a punkt G dzieli bok AB w stosunku $|AG| : |GB| = 1 : 3$. Punkt H jest punktem przecięcia się odcinków AE i DG (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|GH| = \frac{\sqrt{17}a}{12}$.

13. Geometria analityczna

(659) Wyznacz równanie prostej, która przechodzi przez punkty $A(3,-2)$ i $B(7,6)$.

(660) Wyznacz równanie prostej, która jest równoległa do prostej $y = -3x + 11$ i przechodzi przez punkt $A(6,-10)$.

(661) Wyznacz równanie prostej, która jest prostopadła do prostej $y = -3x + 11$ i przechodzi przez punkt $A(6,-10)$.

(662) Wyznacz równanie prostej, która jest nachylona do osi OX pod kątem $60°$ i przechodzi przez punkt $A(2\sqrt{3},7)$.

(663) Wyznacz współrzędne punktu A w którym przecinają się proste o równaniach $y = -3x + 5$ i $y = 2x + 15$.

(664) Dla jakich wartości m proste o równaniach $y = mx - 3$ i $y = -2x + m$ przecinają się w punkcie A o obu współrzędnych dodatnich?

(665) Oblicz długość odcinka AB, jeśli $A(3,-4)$ a $B(-2,8)$.

(666) Dla jakich wartości x długość odcinka AB, gdzie $A(x, 2x-3)$ oraz $B(5,1)$, jest równa $\sqrt{17}$?

(667) Na prostej $y = 2x + 3$ znajdź takie punkty, których odległość od punktu $A(4,1)$ jest równa 5.

(668) Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, gdzie $A(3,2)$ i $B(-7,16)$.

(669) Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie $A(-1,5)$ oraz $B(5,-7)$.

(670) Wyznacz współrzędne punktu symetrycznego do punktu $A(5,1)$ względem prostej o równaniu $y = 2x + 1$.

(671) Podstawa AB trójkąta równoramiennego zawiera się w prostej $y = x + 1$. Mając dane $A(0,1)$ oraz $C(-1,4)$, oblicz współrzędne wierzchołka B.

(672) Dane są współrzędne wierzchołków podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC: $A(2,1)$ oraz $B(8,3)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C wiedząc, że jedno z ramion tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $7x - y - 13 = 0$.

(673) Oblicz odległość punktu $A(4,-6)$ od prostej $y = \frac{3}{4}x + 1$.

(674) Oblicz pole trójkąta ABC mając dane $A(2,2).B(6,6)$ oraz $C(-2,8)$

(675) Okrąg o środku w punkcie $S(4,4)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 9$. Oblicz promień tego okręgu oraz współrzędne punktu styczności.

(676) Okrąg o środku w punkcie $S(-3,2)$ jest styczny do prostej k w punkcie $A(2,3)$. Wyznacz równanie prostej k.

(677) Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(8,-2)$ i $B(0,-6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $2x - 3y - 12 = 0$

(678) Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(1,2)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych.

(679) Wyznacz równania tych stycznych do okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$, które przechodzą przez punkt $A(-4,-4)$.

(680) Wyznacz takie wartości b, dla których prosta o równaniu $y = 4x + b$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 17$ w dwóch różnych punktach.

(681) Dla jakich wartości m prosta o równaniu $3x + 4y + 3 - m = 0$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S(m,4)$ i promieniu $r = 5$?

(682) Wyznacz równanie tej prostej przechodzącej przez punkt $A = (4,2)$, które wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych tworzą trójkąt o polu 25.

(683) W trójkącie równoramiennym ABC, gdzie $|AC| = |BC|$ dane są współrzędne $A(1,0)$ oraz $B(7,1)$. Wysokość opuszczona na jedno z ramion tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $x - y - 1 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

(684) Wierzchołek A trójkąta ABC ma współrzędne $(5,-2)$ a prosta $k: 3x-2y-6=0$ jest jego osią symetrii. Pole tego trójkąta wynosi 26. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

(685) W kwadracie $ABCD$ dany jest wierzchołek $A(6,4)$. Prosta $y=5x$ jest osią symetrii tego kwadratu zawierającą jego przekątną. Oblicz pozostałe współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

(686) Punkty $A(5,1)$ oraz $B(-2,-3)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta $y=\frac{3}{2}x$ jest jego osią symetrii. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego czworokąta oraz jego pole.

(687) (MR 2008) Wykaż, że każdy punkt paraboli o równaniu $y=\frac{1}{4}x^2+1$ jest równoodległy od punktu $A(0,2)$ i od osi OX

(688) (MR 2007) Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y=-x^2+6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox.Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

(689) Punkty przecięcia paraboli $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$ z osią OX są wierzchołkami dłuższej podstawy AB trapezu równoramiennego $ABCD$. Wyznacz na tej paraboli współrzędne punktów C i D tak, aby pole trapezu wynosiło 36.

(690) Punkt $A(-1,-1)$ jest wierzchołkiem kąta ostrego trójkąta prostokątnego ABC opisanego na okręgu o równaniu $(x-4)^2+(y-4)^2=5$, przy czym wierzchołek B kąta prostego leży bliżej osi OX niż wierzchołek C. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

(691) Punkt $C(1,3)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, gdzie $|AC|=|BC|$. Trójkąt ten jest opisany na okręgu o środku w punkcie $S(6,3)$ i promieniu $r=3$. Oblicz współrzędne pozostałych współrzędnych tego trójkąta oraz jego pole.

(692) Dla jakich wartości m równanie $x^2+mx+m+3=0$ ma 2 różne rozwiązania x_1, x_2 takie, że punkt $A(x_1,x_2)$ leży na prostej o równaniu $y=-x-7$?

(693) Punkt $A(4,5)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$, którego pole wynosi 120. Przekątna BD zawiera się w prostej o równaniu $3x+4y-7=0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

(694) Punkt $A(3,6)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, gdzie $|AB|=|AC|$. Pole tego trójkąta wynosi 240, a podstawa BC zawiera się w prostej o równaniu $5x+12y+43=0$. Oblicz obwód tego trójkąta.

(695) Dany jest okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y-2)^2=4$. Środek pewnej cięciwy tego okręgu ma współrzędne $P(4,1)$. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę cięciwę oraz jej długość.

(696) Punkt $A(4,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o środku $S(-4,3)$. Wyznacz pozostałe współrzędne tego trójkąta.

(697) W rombie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie $S(2,-1)$. Dwa kolejne wierzchołki rombu mają współrzędne $A(m,-3)$ oraz $B(m+6,m-5)$ gdzie m jest liczbą rzeczywistą. Wyznacz współrzędne wierzchołków rombu, jego pole, kosinus kąta rozwartego oraz równanie okręgu wpisanego w ten romb.

(698) Dana jest prosta o równaniu $3x-4y+5=0$. Dla jakich dodatnich wartości m okrąg o równaniu $x^2+y^2=m$ przecina tę prostą w dwóch różnych punktach A i B takich, że długość odcinka AB jest równa 6?

(699) (MPL 2009) Dane są punkty $A(2,0)$ i $B(12,0)$. Na prostej $y=x$ wyznacz taki punkt C, aby kąt ACB był prosty.

(700) Na paraboli $y = x^2 - 4$ znajdź takie punkty, których odległość od punktu $Q(3,0)$ wynosi 5.

(701) Wyznacz równania okręgów stycznych jednocześnie do prostej $5x - 12y + 60 = 0$ oraz do obu osi układu współrzędnych, leżących w drugiej ćwiartce układu współrzędnych.

(702) Prosta $k : 3x - 4y + 25 = 0$ zawiera średnicę AB okręgu, przy czym obie współrzędne punktu B są liczbami dodatnimi. Długość tej średnicy wynosi 10. Punkt A przecięcia tej prostej z prostą $l : x - y + 8 = 0$ należy do tego okręgu, ponadto prosta ta przecina okrąg w punkcie C. Wyznacz współrzędne punktu C.

(703) Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(7,1), B(5,5), C(2,6), D(-2,4)$. Wykaż, że na tym czworokącie można opisać okrąg.

(704) (MRS 2009) Jeden z końców odcinka leży na paraboli o równaniu $y = x^2$, a drugi na prostej o równaniu $y = 2x - 6$. Wykaż, że długość tego odcinka jest nie mniejsza od $\sqrt{5}$.

(705) Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A(1,4)$ i $B(-6,3)$ leży na osi Ox. Wyznacz równanie tego okręgu oraz wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i oddalonej od początku układu współrzędnych o $\sqrt{2}$.

(706) Dane są punkty $A(1,-3)$ i $B(5,0)$ oraz parabola $y = x^2$. Wyznacz na tej paraboli taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 8.

(707) (MR 2005) Pary liczb (x, y) spełniające układ równań: $\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$ są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$. Wyznacz współrzędne punktów: A, B, C, D, wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym oraz wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

(708) (MR 2009) W układzie współrzędnych narysuj okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ oraz zaznacz punkt $A(0,-1)$. Prosta o równaniu $x = 0$ jest jedną ze stycznych do tego okręgu przechodzących przez punkt A. Wyznacz równanie drugiej stycznej do tego okręgu, przechodzącej przez punkt A.

(709) (MR 2011) Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2,0)$.

(710) (MR 2013) Prosta o równaniu $3x - 4y - 36 = 0$ przecina okrąg o środku $S(3,12)$ w punktach A i B. Długość odcinka AB jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

(711) (MR 2014) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - (2m + 2)x + 2m + 5$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że suma kwadratów odległości punktów $A(x_1, 0)$ i $B(x_2, 0)$ od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ jest równa 6.

(712) (MR 2014) Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A(0, 2\sqrt{3}), B(2,0)$, a C leży na osi Ox. Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek E.

(713) (MR 2016) Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wykresy funkcji f i g, określonych wzorami $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = 5 - ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

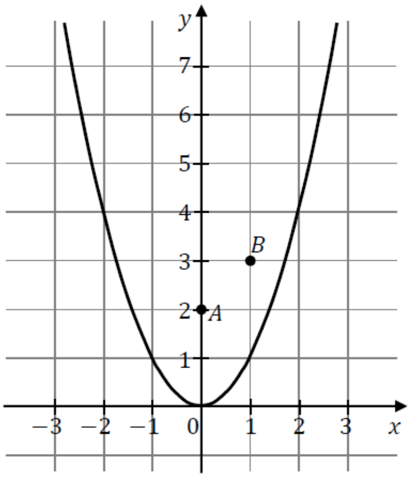
(714) (MR 2016) Punkty $A(30,32)$ i $B(0,8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x-y+2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

(715) (MR 2017) Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(-5, 3)$ i $B(0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

(716) (MR 2018) Punkt $A(7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

(717) (MR 2021) Prosta przechodząca przez punkty $A(8, -6)$ i $B(5, 15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$. Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą AB.

(718) (MR 2021) Dane są parabola o równaniu $y = x^2$ oraz punkty $A(0, 2)$ i $B(1, 3)$ (zobacz rysunek). Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołek C leży na tej paraboli. Niech m oznacza pierwszą współrzędną punktu C. Wyznacz pole P trójkąta ABC jako funkcję zmiennej m. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których trójkąt ABC jest ostrokątny.



(719) (MRC 2012) Okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $A(0, 2) i B(2, 0)$ oraz jest styczny do prostej l w punkcie $C(1, a)$, gdzie $a > 1$. Wyznacz równanie prostej l.

(720) (MRC 2013) Punkty $A(2, 0)$ i $B(4, 2)$ leżą na okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$. Wyznacz na tym okręgu taki punkt C, aby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB.

(721) (MRC 2014) Odcinek AB o długości 4 jest zawarty w prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$. Symetralna odcinka AB przecina oś Oy w punkcie $P(0, 6)$. Oblicz współrzędne końców odcinka AB.

(722) (MRC 2015) Prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S(1, -4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

(723) (MRC 2016) Punkty $A(-7, -2)$ i $B(4, -7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC, a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

(724) (MRC 2017) Prosta l, na której leży punkt $P(8, 2)$, tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l.

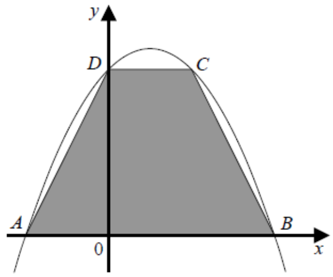
(725) (MRC 2018) Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB, BC i

CA w punktach – odpowiednio – $P(0,10), Q(8,6)$ i $R(9,13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A, B i C tego trójkąta.

(726) (MRM 2008) Wiadomo, że okrąg jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x-3$ w punkcie $A(2,1)$ i styczny do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 9$ w punkcie $B(-4,7)$. Oblicz promień tego okręgu.

(727) (MRG 2013) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = mx + (2m+3)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S(0,0)$ i promieniu $r = 3$.

(728) (MRL 2006) Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi Ox, wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2+x+6$ z osią Oy. Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



(729) (MRS 2006) Punkty $A(7,8)$ i $B(-1,2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, w którym $|\sphericalangle BCA| = 90°$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C wiedząc, że leży on na osi OX.

(730) (MRS 2010) Punkt $A(2,-3)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 300. Punkt $S(3,4)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

(731) Dane są punkty $A(2,4)$ i $B(14,-1)$. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{AB}$ i oblicz jego długość.

(732) Wiedząc, że $B(3,-2)$, $\vec{BC} = [4,-1]$, oraz $\vec{AB} = [4,3]$, oblicz współrzędne punktów A i C.

(733) Wykaż, że wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 5x + 7$ i $g(x) = x - 1$ przecinają się w punktach $A(2,1)$ i $B(4,3)$, wyznacz współrzędne wektora $\vec{AB}$ oraz długość tego wektora.

(734) Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\vec{BD} = [-21,-7]$ i $\vec{DC} = [15,8]$. Oblicz pole tego równoległoboku.

(735) Wyznacz współrzędne punktów przecięcia się prostej $2x+3y-6=0$ z okręgiem o środku $S(3,5)$ i promieniu $r = 5$.

(736) Wyznacz współrzędne punktów przecięcia się okręgu o_1 o środku $S_1(1,2)$ i promieniu $r_1 = 5$ z okręgiem o_2 o środku $S_2(-1,6)$ i promieniu $r_2 = \sqrt{5}$.

(737) Wyznacz współrzędne punktów przecięcia się okręgu o_1 o środku $S_1(1,2)$ i promieniu $r_1 = 5$ z parabolą o równaniu $y = (x+2)^2 - 2$.

(738) Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(0,0), B(30,0), C(6,8)$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się dwusiecznej kąta BAC z prostą BC.

(739) Oblicz tangens kąta ostrego, pod którym przecinają się proste $y = 2x+3$ i $y = 4x-1$.

14. Stereometria

(740) Przekątna sześcianu jest o 2 dłuższa od krawędzi tego sześcianu. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego sześcianu.

(741) Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $2\sqrt{6}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

(742) W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej jest 3 razy dłuższa od wysokości tego graniastosłupa, a objętość tego graniastosłupa wynosi $16\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

(743) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens wynosi $\frac{4}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(744) Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami równoramiennymi, w których podstawa ma długość 12, a ramiona 13. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(745) Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość H, a kąt między przekątną tego graniastosłupa a krawędzią podstawy miarę α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

(746) Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne mają długości $|AC| = 3$ i $|AB| = 4$, a krawędź AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wiedząc także, że pole trójkąta BCS wynosi 10, oblicz objętość tego ostrosłupa.

(747) Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $48\sqrt{3}$, a odległość środka wysokości tego ostrosłupa od ściany bocznej jest równa 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(748) Tangens kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy wynosi 2, a przekątna ściany bocznej ma długość $3\sqrt{2}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

(749) W ostrosłupie trójkątnym krawędzie podstawy mają odpowiednio długości 50, 78 i 112. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość 169. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(750) Każda wysokość ściany bocznej ostrosłupa trójkątnego ma długość 5, a podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość 12, a ramiona 10. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(751) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $2\sqrt{6}$, a kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej ma miarę $30°$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

(752) Kosinus kąta między dwiema przekątnymi ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, jest równy $\frac{41}{50}$, a wysokość tego graniastosłupa ma długość 4. Oblicz objętość graniastosłupa.

(753) Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$, a krótsza przekątna tego graniastosłupa ma długość $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

(754) Oblicz objętość czworościanu $ABCD$, w którym $|AB| = |BC| = |AC| = |CD| = 2$ oraz $|AD| = |BD| = \sqrt{5}$.

(755) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $\frac{3}{2}$ a kosinus kąta między przekątnymi ścian boczych wychodzącymi z tego samego wierzchołka wynosi $\frac{4}{5}$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

(756) Podstawą ostrosłupa jest romb, którego bok ma długość 5, a krótsza przekątna długość 6. Każda ze ścian bocznych tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $45°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(757) Podstawą graniastosłupa prostego o objętości 160 jest trapez równoramienny, w którо można wpisać okrąg. Wiedząc, że dłuższa podstawa tego trapezu jest 4 razy dłuższa od krótszej podstawy oraz równa wysokości tego graniastosłupa, oblicz obwód podstawy tego graniastosłupa.

(758) Oblicz objętość czworościanu $ABCD$, w którym $|CD|$=10, a pozostałe krawędzie mają długość 12.

(759) Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest romb $ABCD$, przy czym spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia się przekątnych tego rombu. Mając dane $|AS| = |CS| = \sqrt{41}$ oraz $|BS| = |DS| = \sqrt{34}$ oraz obwód rombu = 20, oblicz objętość tego ostrosłupa oraz tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

(760) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość 5, a kosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(761) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej ma długość $\frac{\sqrt{15}}{2}$, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(762) Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 6, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa.

(763) Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 100, a kosinus kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi wynosi $-\frac{9}{16}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

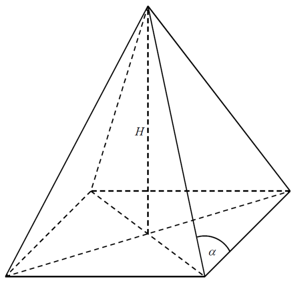
(764) (MR 2009) Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość a i krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa. Oblicz kosinus kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa. Narysuj przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej i oblicz pole tego przekroju.

(765) (MRS 2009) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzie mają równą długość. Oblicz kosinus kąta utworzonego przez dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

(766) Podstawą graniastosłupa $ABCDA'B'C'D'$ jest prostokąt $ABCD$. Mając dane $|A'B| = 5, |C'B| = 8, |\sphericalangle A'BC'| = 60°$ oblicz objętość tego graniastosłupa.

(767) (MR 2005) Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

(768) (MR 2008) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy $(45° < \alpha < 90°)$. (zobacz rysunek). Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1}$.

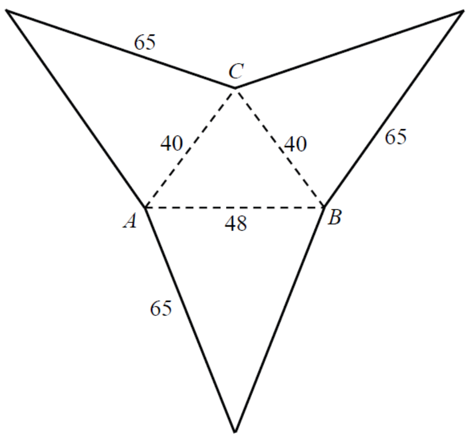


(769) (MR 2011) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

(770) (MR 2012) Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(771) (MR 2013) W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od ściany BCS jest równa d. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

(772) (MR 2014) Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego $ABCS$, którego siatka została przedstawiona na rysunku.



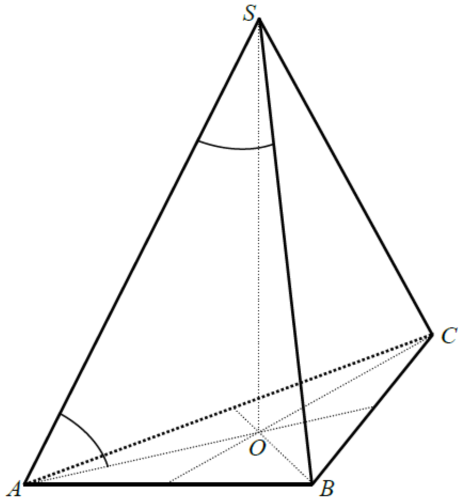
(773) (MR 2015) Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

(774) (MR 2016) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(775) (MR 2020) Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ramiona tego trapezu mają długości $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa $30°$. Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α taki, że $\text{tg}\alpha = \frac{9}{2}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(776) (MRC 2012) Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 30$, $|BC| = |AC| = 39$ i spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka S ma długość 26. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

(777) (MRC 2013) Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt ABC. Kąt nachylenia krawędzi bocznej AS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest równy kątowi między krawędziami bocznymi AS i BS zawartymi w ścianie bocznej ASB tego ostrosłupa (zob. rysunek). Oblicz kosinus tego kąta.

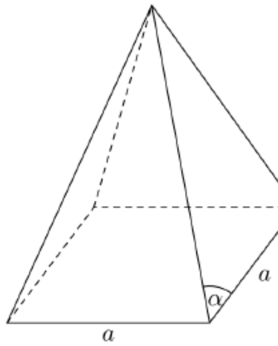


(778) (MRC 2014) Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 25. Ściany boczne ABS i BCS mają takie same pola, każde równe 250. Ściany boczne ADS i CDS też mają jednakowe pola, każde równe 187,5. Krawędzie boczne AS i CS mają równe długości. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

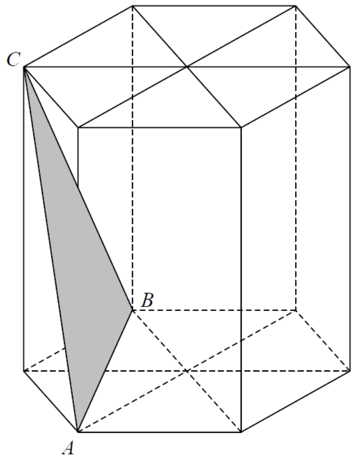
(779) (MRC 2015) Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze $30°$. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD.

(780) (MRC 2016) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Oblicz kosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

(781) (MRG 2013) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Kąt między krawędzią boczną, a krawędzią podstawy ma miarę $\alpha > 45°$(zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



(782) (MRM 2008) W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym płaszczyzna ABC zawierająca przekątne sąsiednich ścian bocznych, wychodzących z tego samego wierzchołka, jest nachylona do podstawy graniastosłupa pod kątem $\alpha = 60°$. Pole przekroju graniastosłupa tą płaszczyzną równa się $8\sqrt{3}$. Zaznacz na poniższym rysunku kąt α. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



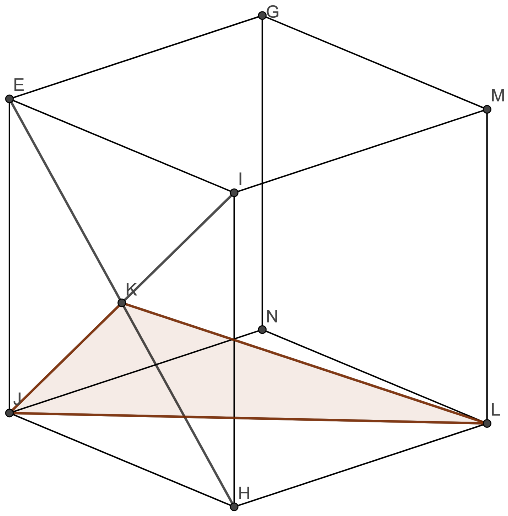
(783) (MRS 2006) Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa a. Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę 45°. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.

(784) (MRS 2010) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $12\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe 36. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

(785) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. Mając $|AB| = 8\sqrt{2}$ oraz, że wysokość tego ostrosłupa jest równa 3. Oblicz pole trójkąta MNS, gdzie M i N są odpowiednio środkami boków BC i CD.

(786) Sześcian o boku długości $\sqrt{6}$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną jego podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz pole powstałego przekroju.

(787) Dany jest sześcian $JHLNEIMG$ o boku długości 2. Punkt K jest punktem przecięcia się przekątnych ściany bocznej $JHIE$ (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta JKL.



15. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

(788) W pewnej klasie nauczyciel zadał do domu 10 zadań, z których każde miało po 3 podpunkty oraz 5 zadań, z których każde miało po 4 podpunkty. Ile podpunktów łącznie było zadane?

(789) Ile jest liczb 3-cyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ takich, że cyfry mogą się powtarzać?

(790) Rzucamy trzykrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Ile jest różnych możliwych wyników?

(791) Ile jest liczb 3-cyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ takich, że cyfry nie mogą się powtarzać?

(792) Rzucamy trzykrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Ile jest różnych możliwych wyników takich, że liczba oczek w kolejnych rzutach się nie powtarza?

(793) Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których każda z cyfr 1,2,3,4 i 5 występuje dokładnie jeden raz?

(794) Na ile sposobów można ustawić w kolejce 6 osób?

(795) Ile jest liczb 7-cyfrowych złożonych wyłącznie z cyfr 1 i 2 przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy?

(796) Na ile sposobów z 7-osobowej grupy osób można wybrać 3-osobową drużynę?

(797) Ile jest liczb 6- cyfrowych, w których nie występuje zero a występują dokładnie dwie dwójki i dokładnie trzy trójki?

(798) Ile jest liczb 8-cyfrowych o wszystkich cyfrach parzystych?

(799) (MR 2011) Ile jest liczb 8-cyfrowych w których nie występuje zero, występują dokładnie dwie dwójki i dokładnie trzy trójki?

(800) Ile jest liczb 8-cyfrowych w których występują dokładnie 4 zera, a pozostałe cyfry są nieparzyste i różne?

(801) Ile jest liczb 8-cyfrowych w których występuje dokładnie pięć trójek a reszta to cyfry parzyste?

(802) Ile jest liczb 8-cyfrowych w których suma cyfr wynosi 4?

(803) Ile jest liczb 8-cyfrowych w których iloczyn cyfr wynosi 12?

(804) Ile jest liczb 8-cyfrowych w których iloczyn cyfr wynosi 0?

(805) Ile jest liczb 4-cyfrowych, w których cyfra tysięcy jest parzysta, a iloczyn pozostałych cyfr wynosi 9?

(806) Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 12 i jednocześnie niepodzielnych przez 18?

(807) Rozpatrujemy wszystkie naturalne liczby dziewięciocyfrowe w których mogą występować jedynie cyfry 1,2,3. Ile można utworzyć takich liczb, w których cyfra 1 występuje dokładnie 5 razy?

(808) Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadnie szóstka.

(809) Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że na co najmniej jednej kostce wypadnie szóstka.

(810) Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że na dokładnie jednej kostce wypadnie szóstka.

(811) Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn oczek wyniesie 24.

(812) Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn oczek będzie podzielny przez 4.

(813) Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn oczek będzie podzielny przez 72.

(814) W pudełku jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy kolejno dwie kule ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie będą białe.

(815) W pudełku jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy kolejno dwie kule ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo, że kule będą różnych kolorów.

(816) W pudełku jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie będą białe.

(817) W pudełku jest 5 kul białych i 3 czarne. Losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że kule będą różnych kolorów.

(818) W pudełku są 3 kule białe, 4 czarne i 5 czerwonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy jednoczesnym losowaniu trzech kul dwie kule będą czarne, a jedna czerwona?

(819) W pudełku są 3 kule białe, 4 czarne i 5 czerwonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy jednoczesnym losowaniu trzech kul żadna kula nie będzie biała?

(820) W pudełku są 3 kule białe, 4 czarne i 5 czerwonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy jednoczesnym losowaniu trzech kul każda kula będzie innego koloru?

(821) W pudełku są 3 kule białe, 4 czarne i 5 czerwonych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy jednoczesnym losowaniu trzech kul wszystkie kule będą jednakowego koloru?

(822) W pudełku są 3 kule białe. Ile trzeba dołożyć kul czarnych, aby przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych wynosiło $\frac{28}{55}$?

(823) W klasie jest 2 razy więcej chłopców niż dziewcząt. Ilu jest chłopców jeśli wiadomo, że przy losowym wyborze 2 osób prawdopodobieństwo wylosowania 2 osób różnej płci jest o $\frac{1}{30}$ większe niż prawdopodobieństwo wylosowania 2 chłopców?

(824) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką otrzymamy tyle samo jedynek, co szóstek?

(825) Ile kul czarnych trzeba dorzucić do pudełka zawierającego jedynie 3 kule białe, aby przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo wylosowania obu kul czarnych było nie mniejsze niż $\frac{7}{15}$?

(826) Rzucamy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie parzysta liczba oczek pod warunkiem, że wypadną co najmniej 4 oczka.

(827) Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek na obu kostkach jest większa niż 8 pod warunkiem, że wypadła co najmniej jedna szóstka.

(828) Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że druga jest parzysta pod warunkiem, że pierwsza była nie większa niż 3.

(829) Ze zbioru wszystkich liczb czterocyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieńśtwo, że cyfrą tysięcy tej liczby jest jedynka pod warunkiem, że suma cyfr tej liczby jest równa 3.

(830) W pierwszej norze są trzy szczury różowe i 7 zielonych. W drugiej - 4 różowe i 6 zielonych, a w trzeciej - 5 różowych i 5 zielonych. Losowo otwieramy jedną norę i z niej wybiega szczur. Jakie jest prawdopodobieństwo, że szczur będzie różowy?

(831) W pudełku są 2 kule białe i 3 czarne. Losujemy jedną kulę, zwracamy ją do pudełka i dokładamy do niego jeszcze 5 kul tego samego koloru, co wylosowana.

Losujemy jedną kulę ponownie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że teraz wylosujemy kulę białą?

(832) W pudełku jest 7 kul białych i 3 czarne. Losujemy jedną kulę, zwracamy ją do pudełka i dokładamy do niego jeszcze 5 kul tego samego koloru, co wylosowana. Losujemy teraz trzy kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie trzy wylosowane kule będą białe?

(833) Dane są zbiory liczb $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{4, 5, 6\}$. Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru A i przekładamy ją do zbioru B, a następnie losowo wybieramy liczbę ze zbioru B i przekładamy ją do zbioru A. Oblicz prawdopodobieństwo, że po tych dwóch operacjach liczby 1 i 6 będą w tym samym zbiorze.

(834) Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których występują dokładnie trzy zera i dokładnie trzy trójki?

(835) Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których występują dokładnie trzy trójki i dokładnie trzy cyfry parzyste?

(836) Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których występuje co najmniej jedna ósemka?

(837) Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których występują co najwyżej dwie ósemki?

(838) Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których występuje co najmniej jedno zero?

(839) Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których występują co najwyżej dwa zera?

(840) Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których występują dokładnie trzy zera, dokładnie jedna czwórka a pozostałe cyfry są nie większe niż 3?

(841) Rozpatrujemy wszystkie liczby czterocyfrowe, w których każda cyfra jest parzysta. Oblicz sumę tych liczb.

(842) Ile jest pięciocyfrowych liczb o iloczynie cyfr równym 8?

(843) Spośród wszystkich liczb 5-cyfrowych losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tej liczbie nie występuje cyfra 2 pod warunkiem, że suma wszystkich cyfr wynosi 3.

(844) Rzucamy 1 raz sześcienną kostką. Jeśli wypadnie jedno oczko - losujemy 4 kule z urny zawierającej 4 kule białe i 6 czarnych. Jeśli wypadnie inna liczba oczek - losujemy 4 kule z urny zawierającej 7 białych kul i 3 czarne. Oblicz prawdopodobieństwo, że spośród tych 4 kul dokładnie dwie będą białe.

(845) Ile jest liczb czterocyfrowych, w których występują co najwyżej dwie cyfry parzyste?

(846) (MR 2008) Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdą się tylko kobiety jest równe $0,1$. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

(847) (MR 2009) W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile jest kul w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od $\frac{9}{22}$.

(848) Ze wszystkich liczb trzycyfrowych dodatnich losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ona podzielna przez 12 jeżeli wiadomo, że jest podzielna przez 15.

(849) Rzucamy pięciokrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że reszka wypadnie dokładnie dwa razy.

(850) Rzucamy pięciokrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że reszka wypadnie co najwyżej jeden raz.

(851) Rzucamy sześć razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że jedynka nie wypadnie ani razu.

(852) Rzucamy sześć razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że jedynka wypadnie co najmniej 2 razy.

(853) Prawdopodobieństwo, że Magda trafi do kosza wykonując rzut wolny wynosi 0,7. Oblicz prawdopodobieństwo, że w czterech rzutach trafi dokładnie trzy razy.

(854) Egzamin składa się z 6 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano trzy odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 4 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź. Oblicz prawdopodobieństwo, że ten student zaliczył egzamin.

(855) (MR 2005) Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest równe $\frac{671}{1296}$.

(856) (MR 2012) Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

(857) (MR 2013) Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

(858) (MR 2013) Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

(859) (MR 2014) Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych kul.

(860) (MR 2015) W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

(861) (MR 2016) Wśród 10 tysięcy mieszkańców pewnego miasta przeprowadzono sondaż dotyczący budowy przedszkola publicznego. Wyniki sondażu przedstawiono w tabeli.

Badane grupy	Liczba osób popierających budowę przedszkola	Liczba osób niepopierających budowy przedszkola
Kobiety	5140	1860
Mężczyźni	2260	740

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana osoba, spośród ankietowanych, popiera budowę przedszkola, jeśli wiadomo, że jest mężczyzną.

(862) (MR 2016) Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

(863) (MR 2017) W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

(864) (MR 2018) Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

(865) Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7 , 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

(866) (MR 2020) Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

(867) (MR 2021) Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

(868) (MRC 2012) Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub podzielnych przez 15.

(869) (MRC 2014) W urnie jest dziesięć kul: 4 białe, 3 czarne, 2 zielone i 1 niebieska. Losujemy jednocześnie trzy kule z urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród wylosowanych kul nie ma kul w tym samym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

(870) (MRC 2015) Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

(871) (MRC 2016) Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

(872) (MRC 2017) Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

(873) (MRC 2018) Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

(874) (MRG 2013) Oblicz, ile jest stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

(875) (MRG 2014) Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę”, pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

(876) (MRM 2008) Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

A – na każdej kostce wypadnie nieparzysta liczba oczek,

B – suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3.

(877) (MRS 2010) Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzystą. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

(878) Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 60 % rozegranych partii wygrywa jego syn. Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od 0,95.

(879) Michael Jordan przez całą karierę w NBA trafiał średnio 83,5 rzutu osobistego na 100. Oblicz prawdopodobieństwo, że oddając 10 rzutów osobistych trafi średnio

co najmniej 9 z nich. Przyjmij, że rzuty wykonuje niezależnie czyli fakt trafienia lub nie nie wpływa na prawdopodobieństwo trafienia kolejnego rzutu. Wynik zaokrąglij do trzeciego miejsca po przecinku.

(880) Rzucamy 7 razy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie dwa razy liczba oczek na obu kostkach jednocześnie będzie parzysta.

(881) Ile rzutów monetą należy wykonać, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła było większe niż $0,999$?

(882) (MRCS 2023) W pudełku umieszczono n kul ($n \geqslant 3$) wśród których dokładnie 2 kule są czarne, a pozostałe kule są białe. Z tego pudełka losujemy jedną kulę i odkładamy ją na bok. Jeżeli wylosowana kula jest biała, to do pudełka wrzucamy kulę czarną, a gdy wylosowana kula jest czarna, to do pudełka wrzucamy kulę białą. Po przeprowadzonej w ten sposób zmianie zawartości prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tego pudełka jest równe $\frac{37}{50}$. Oblicz n.

16. Analiza matematyczna i zadania optymalizacyjne

(883) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2x+4)\sqrt{9x^2+3x+7}}{(6x-7)^2}$

(884) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|3x+4|}{x-2}$

(885) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to5} \frac{x^2-25}{2x-10}$

(886) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+x^2+x+1}{3x^2+x-2}$

(887) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$

(888) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to10} \frac{1}{x-10} - \frac{2x}{x^2-100}$

(889) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^3-1}{|x-1|}$

(890) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2+2x}{|x|}$

(891) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to5^-} \frac{x^2+3}{x-5}$

(892) Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to4^+} \frac{3x-13}{x-4}$

(893) Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{x^3-27}{|9-3x|}$

(894) Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x+1}}{x+2016}$

(895) Dla jakich wartości m granica $\lim\limits_{x\to3} \frac{mx+1}{x-m}$ jest równa 7?

(896) Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = (x-3)^2$

(897) Wyznacz pochodną funkcji $g(x) = 3\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(898) Wyznacz pochodną funkcji $h(x) = (x^5+1)(3x^2 - x + \frac{1}{x})$

(899) Wyznacz pochodną funkcji $p(x) = \frac{x^2-1}{3x+7}$.

(900) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^3+x}$. Oblicz $f'(-1)$.

(901) Dana jest funkcja $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Rozwiąż nierówność $f(x) \geqslant f'(x) - \frac{2}{x^2}$.

(902) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + x$ w punkcie $x_0 = 3$.

(903) Styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 7x$ jest równoległa do prostej o równaniu $y = 3x + 2019$. Wyznacz równanie tej stycznej.

(904) Prosta k jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ w punkcie $x_0 = 2$. Oblicz odległość prostej k od początku układu współrzędnych.

(905) Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}x^3$ nachylonych do osi OX pod kątem $30°$.

(906) Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x - 17$.

(907) Wyznacz ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^4 - 14x^2 - 24x$.

(908) Wyznacz ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$. Pamiętaj o uwzględnieniu dziedziny.

(909) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x}$ w przedziale $\langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$.

(910) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ w przedziale $\langle 1, 3 \rangle$

(911) Dane jest równanie $x^2 + (m+2)x + m^2 - 6m + 9 = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz taką wartość parametru m, dla której wartość wyrażenia $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$, gdzie x_1 oraz x_2 są różnymi rozwiązaniami tego równania, jest możliwie największa.

(912) Wyznacz tak liczbę m, aby funkcja $f(x) = 2x^2 + 3mx + m^2 - 2m - 9$ miała dwa różne miejsca zerowe x_1 i x_2, dla których wartość wyrażenia $(x_1x_2)^2 - 8(x_1 + x_2)$ jest możliwie najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą wartość.

(913) Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 - 6x + 9$. Wyznacz taki punkt na tej paraboli, którego odległość od początku układu współrzędnych jest najmniejsza. Oblicz tę odległość.

(914) Punkty przecięcia paraboli $y = -\frac{1}{4}x^2 + 9$ z osią OX są wierzchołkami dłuższej podstawy trapezu, a pozostałe wierzchołki również leżą na tej paraboli. Oblicz ich współrzędne wiedząc, że pole trapezu jest możliwie największe. Oblicz to pole.

(915) Dana jest parabola o równaniu $y = -x^2 + 6x$. Rozpatrujemy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na tej paraboli powyżej osi OX, a dwa pozostałe na osi OX. Wyznacz współrzędne tego z prostokątów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

(916) Wyznacz równanie tej prostej przechodzącej przez punkt $A(2, 4)$, żeby wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych tworzyła trójkąt o najmniejszym polu. Oblicz to najmniejsze pole.

(917) Na prostej $y = 3$ znajdź taki punkt B, którego suma kwadratów odległości od prostej $x - y + 5$ i od punktu $A(13, 15)$ jest najmniejsza z możliwych. Dla znalezionego punktu B oblicz długość odcinka AB.

(918) Krótsza podstawa oraz ramiona trapezu równoramiennego mają długość 2. Wyznacz tak długość dłuższej podstawy, aby pole tego trapezu było możliwie największe. Oblicz to pole.

(919) Obwód trójkąta prostokątnego wynosi 20. Zapisz pole tego trójkąta jako funkcję jednej z przyprostokątnych. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz długość przeciwprostokątnej, dla której pole trójkąta jest największe. Podaj to największe pole.

(920) Spośród graniastosłupów prawidłowych trójkątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi wynosi 18 istnieje graniastosłup o największej objętości. Oblicz jego wysokość, długość krawędzi bocznej oraz podaj tę największą objętość.

(921) Spośród graniastosłupów prawidłowych trójkątnych, w których przekątna ściany bocznej ma długość $2\sqrt{6}$ istnieje graniastosłup o największej objętości. Oblicz jego wysokość, długość krawędzi bocznej oraz podaj tę największą objętość.

(922) Spośród graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o objętości V istnieje taki, którego suma długości wszystkich krawędzi jest najmniejsza. Oblicz jego wysokość, długość krawędzi bocznej oraz podaj tę najmniejszą sumę.

(923) Spośród graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o objętości 1 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz jego wysokość, długość krawędzi bocznej oraz podaj to najmniejsze pole.

(924) Rozpatrujemy wszystkie proste przechodzące przez punkt $S(2, 8)$ przecinające oś OX w punkcie $A(x, 0)$, $x > 2$ oraz oś OY w punkcie B. Niech punkt S będzie początkiem układu współrzędnych. Wykaż, że suma długości odcinków AS i BS, jako funkcja zmiennej x, wyraża się wzorem $D(x) = x + \frac{8x}{x-2}$ oraz wyznacz tak współrzędne punktów A i B, aby podana suma była możliwie najmniejsza.

(925) Rozpatrujemy wszystkie proste przechodzące przez punkt $S(1, 1)$ przecinające oś OX w punkcie $A(x, 0)$, $x > 1$ oraz oś OY w punkcie B. Wykaż, że długość odcinka AB, jako funkcja zmiennej x, wyraża się wzorem $D(x) = \frac{\sqrt{x^4-2x^3+2x^2}}{x-1}$ oraz wyznacz tak wartość x aby podana długość była możliwie najmniejsza.

(926) Dane są trzy odcinki o długościach $21 - a$, $2a - 3$, $3a - 6$. Zbadaj, dla jakich wartości a z tych odcinków można zbudować trójkąt oraz wyznacz taką wartość

a, żeby pole tego trójkąta było możliwie największe. Oblicz kosinus największego kąta w tym trójkącie.

(927) Rozpatrujemy wszystkie nieskończone ciągi a_n, w których suma wszystkich wyrazów wynosi 1. Wyraź wartość różnicy wyrazów $a_1 - a_3$ jako funkcję ilorazu q tego ciągu. Podaj dziedzinę tej funkcji oraz ustal, dla jakiego q ta różnica przyjmuje wartość największą.

(928) Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4}$. Dla jakiej wartości m funkcja ta ma dwa różne miejsca zerowe x_1 i x_2 takie, że wyrażenie $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

(929) Rozpatrujemy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne o polu całkowitym równym 1. Oblicz wymiary tego graniastosłupa, którego objętość jest największa.

(930) Rozpatrujemy wszystkie prostokąty wpisane w półkole o promieniu 1 w ten sposób, że jeden z boków prostokąta jest zawarty w jego średnicy. Wyznacz długości boków tego z rozpatrywanych prostokątów, którego pole jest największe.

(931) Rozpatrujemy wszystkie romby, których suma długości obwodu i jednej przekątnej wynosi 16. Oblicz długość boku tego rombu, którego pole jest największe.

(932) Rozpatrujemy wszystkie proste przechodzące przez punkt $A(1,4)$ i przecinające oś OX w punkcie A a oś OY w punkcie B przy czym obie współrzędne tych punktów są nieujemne. Wyznacz równanie tej prostej, dla której suma odległości punktów A i B od początku układu współrzędnych jest najmniejsza.

(933) W ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{2}$ a krawędź boczna 5, wpisujemy graniastosłup prawidłowy czworokątny (cztery wierzchołki tego graniastosłupa zawierają się w krawędziach bocznych ostrosłupa, a dolna podstawa graniastosłupa zawiera się w dolnej podstawie ostrosłupa). Wykaż, że objętość tego graniastosłupa jako funkcja długości krawędzi jego podstawy wyraża się wzorem $V(a) = 3a^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$. Wyznacz dziedzinę tej funkcji oraz oblicz największą możliwą objętość tego graniastosłupa.

(934) W okrąg o promieniu 5 wpisano trójkąt równoramienny. Jakie największe pole może mieć ten trójkąt?

(935) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{9}{x-1} + 2$ określona dla $x > 1$. Znajdź taki punkt należący do wykresu tej funkcji, że suma odległości tego punktu od obu osi układu współrzędnych jest możliwie najmniejsza.

(936) Rozpatrujemy wszystkie odcinki AB zawierające punkt $M(8,1)$ i takie, że punkt $A(x,0)$ leży na osi OX, a punkt B na osi OY. Wyznacz wszystkie możliwe wartości x, dla których taki odcinek istnieje. Wykaż, że jego długość wyraża się wzorem $|AB| = \sqrt{\left(\frac{x}{x-8}\right)^2 + x^2}$ oraz znajdź współrzędne takich punktów A i B, dla których ten odcinek jest możliwie najkrótszy. Oblicz długość tego najkrótszego odcinka.

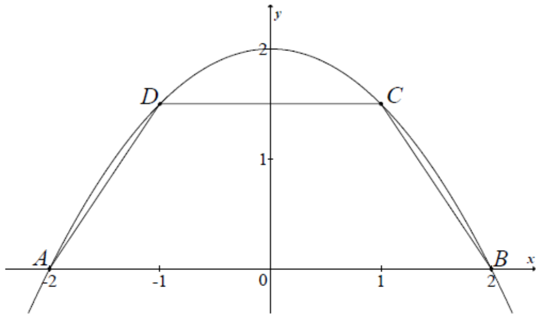
(937) Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu równym 36 i bokach długości a i b przy czym $a > b$. Wykaż, że pole nowego prostokąta o bokach $a+4$ i $b+1$ wyraża się wzorem $P(a) = \frac{a^2+40a+144}{a}$, wyznacz dziedzinę funkcji P oraz najmniejsze możliwe pole nowego prostokąta.

(938) (MR 2006) Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej $2m^3$ istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

(939) (MR 2007) Dany jest układ równań: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$ Dla każdej wartości parametru m wyznacz parę liczb (x, y), która jest rozwiązaniem tego układu równań. Wyznacz najmniejszą i największą wartość sumy $x + y$ dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$.

(940) (MR 2015) Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

(941) (MR 2016) Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A(-2, 0)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

(942) (MR 2017) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P(1, 0)$.

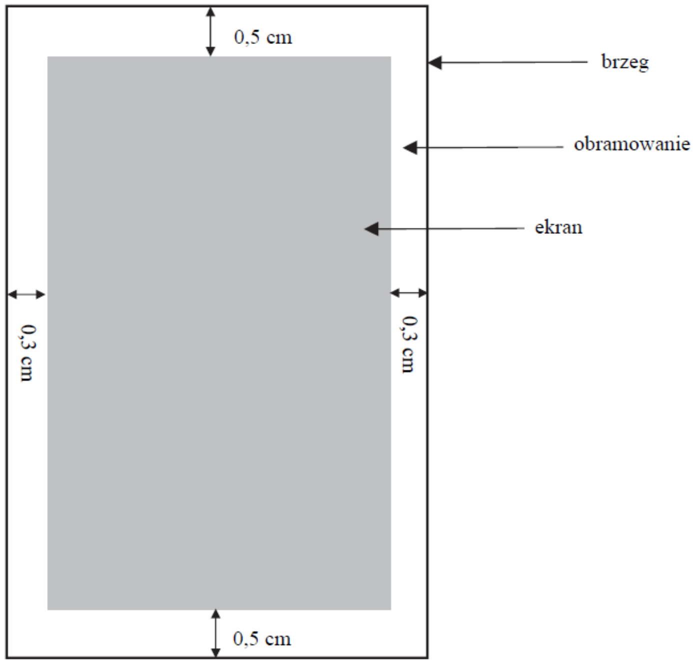
(943) (MR 2018) Styczna do paraboli o równaniu $y = 3x^2 - 1$ w punkcie $P(x_0, y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem $30°$. Oblicz współrzędne punktu P.

(944) (MR 2018) Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach. Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$. Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

(945) (MR 2019) Punkt $P(10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P. Oblicz współczynnik b.

(946) (MR 2019) Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

(947) (MR 2020) Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe 0,5 cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe 0,3 cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60cm^2. Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.



(948) (MR 2021) Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności 144m^3. Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

– 100 zł za 1m^2 dna

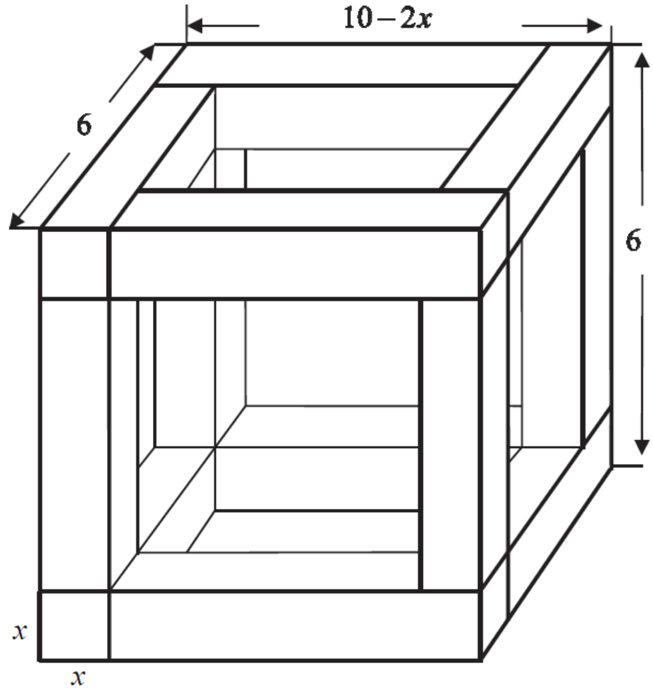
– 75 zł za 1m^2 ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

(949) (MRC 2017) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x}{2x-8}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji dla argumentu $x = \sqrt{2} + 4$.

(950) (MRC 2017) Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1: 2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

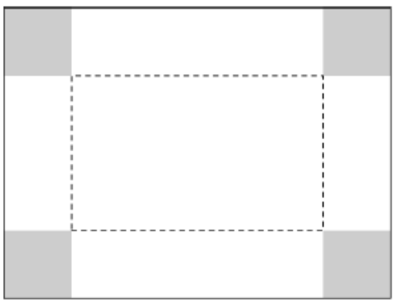
(951) (MRC 2018) Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę funkcji V. Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.

(952) (MRG 2013) Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie A.

(953) (MRG 2013) Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.

(954) (MRG 2014) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f, która jest równoległa do prostej $y = 4x + 7$.

(955) (MRG 2014) Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało

przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

(956) Dana jest funkcja $f(x) = 27^{\log_3 x} - 9^{\log_3(x+1)} + x$. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Wykaż, że funkcję tę można zapisać wzorem
$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ oraz wyznacz najmniejszą wartość tej funkcji.

(957) Właściciel sklepu kupuje jabłka w hurtowni po 2 złote za kilogram. Zauważył, że jeżeli ustali cenę sklepową na x złotych, to w ciągu tygodnia sprzeda średnio $\frac{21600}{x^3}$ kilogramów jabłek. Oblicz, jaką cenę jabłek powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego tygodniowy zysk był największy. Przyjmij, że tygodniowy zysk jest iloczynem zysku na sprzedaży jednego kilograma oraz liczby kilogramów sprzedanych jabłek.

(958) Skoczek narciarski chciałby uzyskiwać jak największe odległości w skokach. Jego trener wyliczył, że jeśli będzie odbijał się x sekund przed końcem rozbiegu, to jego odległość będzie wynosiła $\frac{1500x-500x^2}{x^2+2x+5}$ metrów. Oblicz, dla jakich x wyliczenia trenera mają sens tzn. odległość będzie dodatnia oraz oblicz, dla jakiej wartości x odległość będzie największa i oblicz tę największą odległość.

(959) Niech $f(x) = mx^2 - 2mx$. Prosta $y = mx - 9$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f. Wykaż, że $m = 4$. Funkcja $f(x)$ może być zapisana w postaci
$$f(x) = 4(x-c)(x-d).$$
Znajdź wartości c i d. Funkcja $f(x)$ może być zapisana także w postaci
$$f(x) = 4(x-p)^2 + q.$$
Znajdź wartości p i q. Wyznacz takie wartości x, dla których funkcja f jest jednocześnie rosnąca oraz przyjmuje wartości ujemne.

17. Odpowiedzi do zadań

17.1. Podstawowe równania i nierówności.

(1) $x^2 + 2x + 1$
(2) $x^2 - 4x + 4$
(3) $x^2 - 6x + 9$
(4) $x^2 + 8x + 16$
(5) $x^2 + 10x + 25$
(6) $4x^2 + 4x + 1$
(7) $9x^2 - 24x + 16$
(8) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
(9) $x^4 - 6x^2 + 9$
(10) $x^6 + 2x^3 + 1$
(11) $11 - 6\sqrt{2}$
(12) $36 - 10\sqrt{11}$
(13) $21 - 12\sqrt{3}$
(14) $9x^2 + 6xy + y^2$
(15) $16x^2 - 24mx + 9m^2$
(16) $x^2 - 16$
(17) $4x^2 - 9$
(18) $x^2 - 7$
(19) $9x^2 - 25$
(20) 9
(21) $36 - x^2$
(22) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
(23) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
(24) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
(25) $x^3 - 1$
(26) $x^3 - 27$
(27) $x^3 + 1$
(28) $x^3 + 8$
(29) $(x - 1)^2$
(30) $(x + 5)^2$
(31) $(x - 7)^2$
(32) $(x + 3)^2$
(33) $(2x - 1)^2$
(34) $(3x + 2)^2$
(35) $(x - \sqrt{3})^2$
(36) $(x - 5)(x + 5)$
(37) $(2x - 3)(2x + 3)$
(38) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
(39) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
(40) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
(41) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
(42) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$
(43) $[(x - 1)(x + 1)]^2$
(44) $x(x + 5)^2$
(45) $(x^2 + 1)^2$
(46) $[(x - 3)(x + 3)]^2$

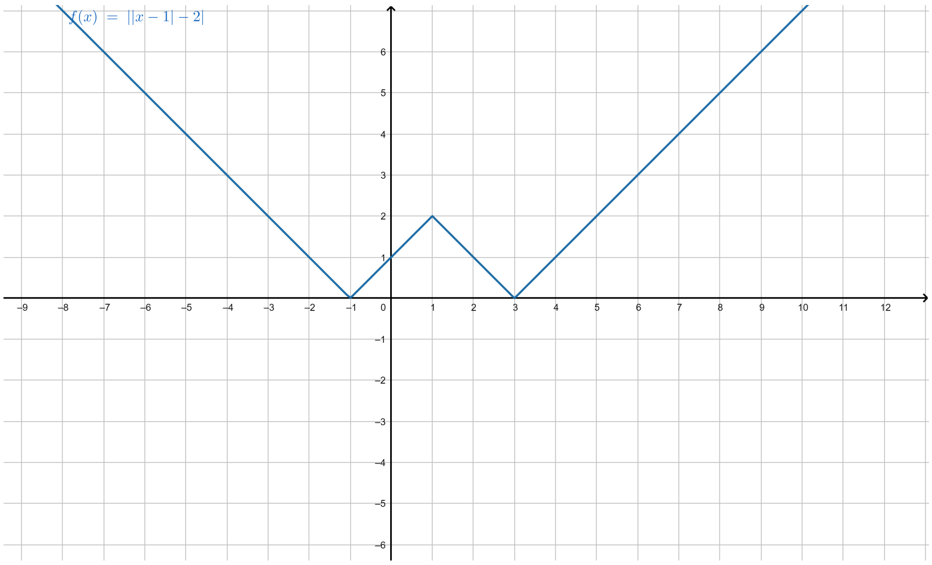
(47) $x(x-2)(x+2)$
(48) $x(x+2)(x^2-2x+4)$
(49) $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$
(50) $(2x-3)^2$
(51) $3(x-1)^2$
(52) $n^2(n-1)^2(n+1)^2$
(53) $x(x^2+1)^2$
(54) $x^4(x-1)(x+1)(x^2+1)$
(55) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
(56) $x=\frac{1}{3}$
(57) $x=2$
(58) $x=\frac{-17}{3}$
(59) $x=-8$
(60) $x\in(-14,+\infty)$
(61) $x\in(-\infty,-\frac{11}{6}\rangle$
(62) $x\in(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$
(63) $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$
(64) $x=3\vee x=-2$
(65) $x=0\vee x=3$
(66) $x=\sqrt{6}\vee x=-\sqrt{6}$
(67) $x\in\varnothing$
(68) $x=-4\vee x=0$
(69) $x=0\vee x=1$
(70) $x\in\varnothing$
(71) $x=-1\vee x=-\frac{3}{2}$
(72) $x=1-\sqrt{3}\vee x=1+\sqrt{3}$
(73) $x=-\frac{1}{3}\vee x=2$
(74) $x=-2$
(75) $x=2\vee x=3$
(76) $x\in\langle-3,3\rangle$
(77) $x\in\mathbb{R}$
(78) $x\in\varnothing$
(79) $x\in(0,8)$
(80) $x\in(-\infty,-5\rangle\cup\langle3,+\infty)$
(81) $x\in(-2,1)$
(82) $x\in(-\infty,3\rangle\cup\langle5,+\infty)$
(83) $x\in\langle-3,-1\rangle$
(84) $x\in\langle-3,2\rangle$
(85) $x\in\varnothing$
(86) $x\in\mathbb{R}$
(87) $x\in\{-5\}$, można też zapisać $x=-5$
(88) $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$
(89) $x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle\frac{5}{2},+\infty)$
(90) $x\in\langle0,9\rangle$
(91) $x\in(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(1,+\infty)$
(92) $x\in(1,3)$
(93) $x\in(0,\frac{3}{2})$
(94) $x=-2\vee x=3\vee x=4$

(95) $x = -3 \vee x = 3$
(96) $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$
(97) $x = 0$
(98) $x = -1 \vee x = 0$
(99) $x = 0 \vee x = -1 \vee x = -2$
(100) $x = -\frac{5}{2} \vee x = 1 \vee x = 0$
(101) $x = -2 \vee x = 2 \vee x = 5$
(102) $x = -\frac{1}{2}$
(103) $x = -3 \vee x = 3 \vee x = 4$
(104) $x = -5 \vee x = -2 \vee x = 5$
(105) $x = -3$
(106) $x = -4 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$
(107) $x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2$
(108) $x = 1$
(109) $x = 3$
(110) $x = -1 \vee x = -2 \vee x = \frac{3}{2}$
(111) $x = 2 \vee x = -3 - \sqrt{19} \vee x = -3 + \sqrt{19}$
(112) $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$
(113) $x = 1$
(114) $x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$
(115) $x = -2 \vee x = 1$
(116) $x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$
(117) $x \in (1, 3) \cup (5, +\infty)$
(118) $x \in \langle -3, -2\rangle \cup \{1\} \cup \langle 2, +\infty)$
(119) $x \in \langle -5, -1\rangle \cup \{3\}$
(120) $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$
(121) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, +\infty)$
(122) $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
(123) $x \in (-\infty, 1\rangle$
(124) $x \in (-\infty, -1)$
(125) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \{2\}$
(126) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 0, 3\rangle$
(127) $x \in (-6, -1) \cup (0, 1)$
(128) $x \in \langle 2, 3\rangle$
(129) $x \in (-\infty, -6\rangle \cup \{-2, 6\}$
(130) $x \in (-\infty, 4) \cup (7, 8)$
(131) $x \in (-\infty, \frac{10}{3}\rangle \cup \langle 5, 7\rangle$
(132) $x \in (-4, 3) \setminus \{0, 2\}$
(133) $x \in (-2, -1)$
(134) $x \in \{1\} \cup \langle 5, +\infty)$
(135) $x \in (-\infty, 1) \setminus \{-1, 0\}$
(136) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \{3\}$
(137) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$
(138) $x = 1 \vee x = 3$
(139) $x = 0$
(140) $x \in \langle 3, 6)$
(141) $x \in (6, 7)$
(142) $x \in \langle -9, 0) \cup (3, 4\rangle$

(143) $x \in \langle -2, 0\rangle \setminus \{-1\} \cup (1, +\infty)$
(144) $x \in (-2, 0) \cup (2, 4\rangle$
(145) $x \in (-\infty, -3) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (0, \sqrt{3})$
(146) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2\rangle$
(147) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle \cup (1, +\infty)$.
(148) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3\rangle$

17.2. Wartość bezwzględna - równania, nierówności, wykresy.

(149) $x = -5 \vee x = 5$
(150) $x = -1$
(151) $x \in \varnothing$
(152) $x = -3 \vee x = 8$
(153) $x \in \varnothing$
(154) $x \in \{-6, 6, -2, 2\}$
(155) $x = 10 \vee x = -4$
(156) $x = -2 \vee x = 4$
(157) $x = 9$
(158) $x = \frac{1}{2}$
(159) $x \in (-3, 3)$
(160) $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 4, +\infty)$
(161) $x \in \varnothing$
(162) $x \in \mathbb{R}$
(163) $x \in \langle -3, 1\rangle$
(164) $x \in (-\infty, -8\rangle \cup \langle 4, +\infty)$
(165) $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
(166) $x \in (-9, -5)$
(167) $x \in \langle 0, 10\rangle$
(168) $x \in (-\infty, -6\rangle \cup \langle 5, +\infty)$
(169) $x \in (-\frac{4}{3}, 2)$
(170) $x \in (-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$
(171) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 5) \cup (9, +\infty)$
(172) $x \in (0, 2) \cup (4, 6)$
(173) $x \in (2, +\infty)$
(174) $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (0, +\infty)$
(175) $x \in (-\infty, -1)$
(176) $x \in (-4, 0) \cup (12, +\infty)$
(177) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup \langle -1, \frac{11}{3}\rangle$
(178) $x \in \langle -\infty, 2\rangle$
(179) $x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 6, +\infty)$
(180) $x \in \langle -11, -1\rangle \cup \left\langle \frac{17}{3}, +\infty\right)$
(181) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

(182) 

0 rozwiązań dla $m < 0$, 2 rozwiązania dla $m = 0$ lub $m > 2$, 3 rozwiązania dla $m = 2$, 4 rozwiązania dla $m \in (0, 2)$

(183) $m \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

(184) $m \in (-3, -2) \cup (2, 3)$

(185) $m \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

(186) $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

17.3. Dowody algebraiczne.

(187) $a^2 + b^2 = 28, a^3 + b^3 = 144, a^4 + b^4 = 752, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}, a^2b + ab^2 = 24, (a - b)^2 = 20, |a - b| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(188) dowód - skoro $a^2 - b^2 = 70$, to $(a - b)(a + b) = 70$, więc $10(a - b) = 70$ czyli $a - b = 7$.

(189) dowód - $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab) = 2(2^2 + 9) = 26$

(190) dowód - $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 2 + 6 = 8$.

(191) $ab = 7$ lub $ab = 11$. Skoro $a+b = 6$, to $a^2+2ab+b^2 = 36$, stąd $a^2+b^2 = 36-2ab$. Z drugiej strony $a^3b+ab^3 = 154$, więc $ab(a^2+b^2) = 154$, a zatem $ab(36-2ab) = 154$ i stąd $ab = 7$ lub $ab = 11$.

(192) dowód - po wymnożeniu założenia otrzymujemy $(ad - bc)^2 = 0$, stąd teza.

(193) dowód - podnosimy oba założenia do kwadratu i obliczamy kolejno wartości wyrażeń: $2ab, ab, (ab)^2$ oraz $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$.

(194) dowód - jeśli $a^2+a = b^2+b$, to $a^2-b^2+a-b = 0$, a więc $(a-b)(a+b)+a-b = 0$, stąd $(a - b)(a + b + 1) = 0$ i ponieważ $a \neq b$, to $a + b = -1$.

(195) dowód - pomnożyć przez $xy \neq 0$ lub sprowadzić do wspólnego mianownika i podobnie do poprzedniego.

(196) dowód - np. podzielić obie strony przez $n^2 \neq 0$ i podstawić $t = \frac{k}{n}$.

(197) dowód - przerzucić wszystko na lewą stronę otrzymując $2a^3 - 4a^2b + ab^2 - 2b^3 + a - 2b = 0$ i z każdych dwóch składników coś wyciągnąć przed nawias. Można też po przerzuceniu po prostu wymusić $a - 2b$.

(198) dowód - $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = frac2c - bc - b - \frac{b}{c-b} = frac2c - 2bc - b = 2$.

(199) dowód - np. przekształcamy równość z założenia do postaci $(a-2b)(a+2b+2) = 0$. Drugi czynnik jest dodatni z założenia, więc $a = 2b$. Można też na początku dodać obustronnie 1 i później skorzystać z faktu, że obie strony równania są dodatnie i pozbyć się kwadratów.

(200) dowód - przekształcamy równanie do postaci $x^8 - 2x^4 + 1 + x^2 - 2x + 1 = 0$ czyli $(x^4 - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$, a suma kwadratów jest równa 0 tylko wtedy gdy oba składniki są równe 0. A to zachodzi tylko dla $x = 1$.

(201) 210

(202) dowód - przerzucając wszystko na lewą stronę i odpowiednio grupując, otrzymujemy równoważną nierówność $(a - b)^2(a^2 + 1) \leqslant 0$ która jest prawdziwa tylko jeśli $a - b = 0$, bo wyrażenie $a^2 + 1$ jest zawsze dodatnie.

(203) dowód - z założenia $a + b = -c$, więc $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) - (a + b)^3 = 3abc = 3$.

(204) dowód - wykonujemy potęgowanie lewej strony nierówności a później mnożymy obie strony przez 4.

(205) dowód - przerzucając na jedną stroną, odpowiednio grupując i wyciągając przed nawias otrzymujemy oczywistą nierówność $(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geqslant 0$.

(206) dowód - podobnie, tylko mnożymy najpierw przez $\sqrt{ab}$.

(207) dowód - $5y^2$ rozbijamy na $4y^2+y^2$ i otrzymujemy sumę 2 nieujemnych składników.

(208) dowód - podobnie $10y^2 = 9y^2 + y^2$

(209) dowód - podobnie $2x^2 = x^2 + x^2$

(210) dowód - na przykład przekształcamy to wyrażenie do postaci $x^4 - 6x^2 + 9 + x^2 - 2x + 1$.

(211) dowód - przenosimy wszystko na jedną stronę - po pogrupowaniu i wyciągnięciu przed nawias otrzymamy postać $(a-b)(a+b)^2 \geqslant 0$. Wyrażenie $a-b$ jest dodatnie z założenia.

(212) dowód - na jedną stronę i grupujemy

(213) dowód - na jedną stronę i grupujemy

(214) dowód - wskazówka: np. rozbij $4a^3$ na $3a^3 + a^3$

(215) dowód - przekształć założenie do postaci $ab = c(a+b)$ wykorzystaj fakt, że $c > 1$.

(216) dowód - próbujemy zwinąć do kilku kwadratów.

(217) dowód - nierówności między średnimi

(218) dowód - nierówności między średnimi

(219) dowód - nierówności między średnimi

(220) dowód - nierówności między średnimi

(221) dowód - nierówności między średnimi

(222) dowód - nierówności między średnimi

(223) dowód - nierówności między średnimi

(224) dowód - nierówności między średnimi

(225) dowód - można wymusić $(x + y)$ lub rozbić $9x^3$ na $3x^3 + 5x^3 + x^3$ i pogrupować.

(226) dowód - rozbijamy na sumę trzech kwadratów; można też przenieść wszystko na lewą stronę i to wyrażenie potraktować jako funkcję zmiennej x i wykazać, że cały jej wykres leży zawsze nad osią OX lub jest do niej styczny ($a > 0$ oraz $\Delta \leqslant 0$).

(227) dowód - $2a^2 + 2b^2 + c^2 + 2bc + 2ac = a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a - b)^2 + (a + b + c)^2$, a z założenia wynika, że pierwszy składnik jest dodatni.

(228) dowód - wymuszamy $3a + b$ przed nawias otrzymując postać $(3a + b)(2a - b)^2$.

(229) wskazówka - wymusić $3a - b$ lub rozbić $5a^2b$ na $3a^2b + a^2b + a^2b$ i pogrupować.

(230) wskazówka - 3 wzory skróconego mnożenia.

(231) wskazówka - 2 wzory skróconego mnożenia - wyrażenie $(x - 3)^2$ jest dodatnie z założenia.

(232) wskazówka - można obie strony nierówności pomnożyć przez iu bo jest to dodatnie, a następnie np. zapisać $3u^2$ jako $2u^2 + u^2$. Można też podstawić $t = \frac{i}{u}$.
(233) dowód - przerzucamy wszystko na lewą stronę i np. metodą grupowania doprowadzamy nierówność do postaci $(a-b)^2(a+b) \geqslant 0$, która jest zawsze prawdziwa.
(234) dowód - mnożąc obie strony przez dodatnie z założenia wyrażenie xy otrzymamy równoważną nierówność $x^3+y^3+(x-y)^2 > 0$, Skoro x i y są dodatnie, a kwadrat zawsze nieujemny, to otrzymane wyrażenie jest dodatnie.
(235) wskazówka - zapisz $-x^2$ jako $-2x^2 + x^2$.
(236) dowód - najszybciej z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną
(237) dowód - przekształcamy nierówność do postaci $(xy-2)^2+2(x-y)^2 > 0$. Pierwszy składnik jest nieujemny a drugi dodatni, gdyż $x \neq y$. Zatem ich suma jest dodatnia.
(238) wskazówka - przerzuć wszystko na jedną stronę i doprowadź do wspólnego mianownika. Mianownik ten będzie dodatni z założenia.
(239) wskazówka - obie strony tej nierówności są dodatnie, więc można podnieść obustronnie do kwadratu.
(240) wskazówka - rozbij $-3a^2b$ na $-2a^2b - a^b$ a potem $2a^2$ na $a^2 + a^2$, Można też wymusić od początku $2a + b$.
(241) wskazówka - ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, możemy je podnieść do kwadratu.
(242) wskazówka - rozbij $5x^2$ na $4x^2 + x^2$.
(243) dowód - mnożąc obustronnie przez mianowniki, które z założenia są dodatnie oraz odpowiednio przekształcając otrzymujemy nierówność $(a-b)(ab(a+b)-2) > 0$ która jest prawdziwa, bo $a > b$ oraz z założenia mamy $ab > 1$ oraz $a + b > 2$.
(244) wskazówka - ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, możemy je podnieść do czwartej potęgi.
(245) albo mnożymy przez $a > 0$ obie strony i rozkładamy na czynniki, albo można $\frac{2}{a}$ rozbić na $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}$ a następnie skorzystać z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla trzech liczb: $a^2, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}$.
(246) dowód - wyciągamy 5^{98} przed nawias
(247) dowód - rozkładamy stosując wzory skróconego mnożenia tak długo, aż otrzymamy jako jeden z czynników, liczbę 15 lub liczbę podzielną przez 15.
(248) dowód - jak wyżej tylko 19
(249) dowód - rozkładamy stosując wzór skróconego mnożenia - otrzymamy jako jeden z czynników, liczbę 30.
(250) dowód - $2^6 = 4^3$; jak wyżej tylko 3
(251) dowód - wyciągamy 3^n przed nawias i skoro $n \geqslant 2$, to $9|3^n$.
(252) dowód - $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$
(253) dowód - przypadki $(1^\circ n = 3k+1, 2^\circ n = 3k+2)$.
(254) dowód - $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$. Wystarczy wykazać, że $9|3n^3 + 15n$, czyli $3|n^3 + 5n$ - co można na przypadki lub sprytnie - $n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n$ i mamy trzy kolejne liczby całkowite.
(255) dowód - $2n(2n+1)(2n+2) = 4n(n+1)(2n+1)$ i podzielność przez 3 na przypadki.
(256) dowód - skoro $n = 2k+1$, to $n^2 - 1 = 4k(k+1)$ i mamy dwie kolejne liczby całkowite, więc $2|k(k+1)$ stąd teza.
(257) dowód - $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2$.
(258) dowód - $(5k+1)^4 - (5n+2)^4 = ((5k+1)^2 - (5n+2)^2)((5k+1)^2 + (5n+2)^2)$ i łatwo sprawdzić, że drugi z tych czynników jest podzielny przez 5.

(259) dowód - jeśli $m = 7k + 2$, to $m^3 - 1 = (7k + 2)^3 - 1$ i teraz albo rozkładamy ze wzoru na różnicę sześcianów albo wykonujemy potęgowanie i redukcję - w obu przypadkach będzie się dało wyciągnąć liczbę 7.
(260) dowód - $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$ i jeśli a lub b jest parzysta, to iloczyn jest parzysty, a jeśli obie są nieparzyste, to $a + b$ jest liczbą parzystą.
(261) dowód - podobnie jak poprzednie, tylko jeśli obie są niepodzielne przez 3, to rozpatrujemy wszystkie 4 przypadki (można 3, bo dwa są symetryczne),
(262) dowód - $2|n(n + 1)$ a podzielność przez 3 na przypadki (lub sprytnie)
(263) dowód - zarówno podzielność przez 2, jak i przez 3 można na przypadki ale można też sprytnie - $n^3 - n - 18n = (n - 1)n(n + 1) - 18n$ i zarówno $6|(n - 1)n(n + 1)$ (3 kolejne liczby całkowite), jak i $6|18$.
(264) dowód - $n = 2k$ i rozkładając na czynniki otrzymamy iloczyn liczby 16 i czterech kolejnych liczb całkowitych.
(265) dowód - analogicznie - otrzymujemy iloczyn liczby 81 i kwadrat iloczynu 2 kolejnych liczb całkowitych.
(266) dowód - $16n^3$ zapisujemy jako $12n^3 + 4n^3$ i już łatwo pokazać, że $12|4n^3 - 4n$.
(267) dowód - zapisujemy -51 jako -3-48, rozkładamy na czynniki i podstawiamy $n = 2k + 1$ i otrzymamy iloczyn liczby 8 i trzech kolejnych liczb całkowitych minus 48.
(268) dowód - podstawiamy $n = 2k$ i jak poprzednie.
(269) dowód - podobnie - iloczyn 16 i kwadratu dwóch kolejnych liczb.
(270) dowód - po zwinięciu otrzymujemy $[(k - 1)k(k + 1)]^2$ a to jest kwadrat iloczynu trzech kolejnych liczb całkowitych czyli jest podzielny przez $6^2 = 36$.
(271) wskazówka - udowodnij na przypadki podzielność przez 2, oraz też na przypadki osobno podzielność przez 3. Można też „sprytnie" dodać i odjąć wyrażenie km i doprowadzić liczbę z zadania do postaci $m(k - 1)k(k + 1) - k(m - 1)m(m + 1)$ i skorzystać z faktu, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6
(272) dowód - przerzucamy 125 na prawą stronę - równanie jest równoważne równaniu $x(x - 1)(x + 1) = 125$, a lewa strona jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, więc jest podzielna przez 6, a 125 nie jest podzielne przez 6, więc to równanie nie ma rozwiązań całkowitych. Oczywiście można też sprawdzić rachunkowo, że żadna z liczb 1,5,25,125 oraz -1, -5, -25, -125 nie jest rozwiązaniem tego równania i powołać się na twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

17.4. Funkcja kwadratowa.

(273) $f(x) = -(x - 3)^2 + 2$
(274) $f(x) = 2(x + 3)(x - 1)$
(275) $f(x) = -(x - 4)^2 + 2$
(276) $m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
(277) $m \in (0, 1)$
(278) $m \in (-3, 0\rangle$
(279) $m \in (14, +\infty)$
(280) -1. 0, 1, 2
(281) $\frac{7}{39}$
(282) $f_{MAX} = \frac{169}{4}$
(283) $m = 2$
(284) $m \in (1, +\infty)$

(285) $m \in (-\frac{25}{3}, -8) \cup (0, 1)$
(286) $m \in (3, +\infty) \setminus \{6\}$
(287) $m \in (-\infty, -9)$
(288) $m \in (-2, 1)$
(289) $m = \frac{7}{2}$
(290) $m = 1$
(291) $m = \frac{8}{3}$
(292) $k \in \langle\frac{7}{3}, 5)$
(293) $m = -3$
(294) $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{7}) \cup (2, +\infty)$
(295) $m = -\frac{13}{3}$
(296) $m \in (-\infty, 1\rangle \setminus \{-2\}$
(297) $m \in (4, \frac{11}{2})$
(298) $m \in (-\infty, \frac{17}{4}) \setminus \{4\}$
(299) $m \in (0, 1 + \sqrt{2})$
(300) $m = 0$
(301) $m = -7$ lub $m = 3$
(302) $m = -1$
(303) $m \in \{-2, -1, 0\}$
(304) $p = 3, q = -1$ lub $p = -1, q = 3$
(305) $m \in \langle -4. - 2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, 4\rangle$.
(306) $m \in (0, 1) \cup (2, 3)$
(307) $m = \sqrt{14} \vee m = -\sqrt{14}$.
(308) $m \in \langle 0, 3 - \sqrt{7}\rangle$.
(309) $m = \frac{12+\sqrt{109}}{5}$.
(310) $m \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup \left(4, \frac{9}{2}\right)$
(311) $m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right) \setminus \{-6\}$.
(312) $m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$.
(313) $m = -\frac{9}{5} \vee m = \frac{1}{4}$.
(314) $m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0, 4) \setminus \{1\}$
(315) $m = \frac{7}{2}$ lub $m = -\frac{5}{2}$
(316) $m \in \left(-1, -\frac{2}{5}\right) \cup (2, 5\rangle$
(317) $m \in \left\langle \frac{5}{18}, \frac{1}{2}\right)$.
(318) $m = -4$
(319) $m \in (-\infty, -2)$
(320) $m \in \left\langle -\frac{1}{4}, 0\right) \cup (2, +\infty)$.
(321) $m \in (-1, 4)$.
(322) $m = \frac{14}{3}$. Dla $m = 4$ równanie ma jedno rozwiązanie.
(323) $m = -4$ lub $m = 8$.

17.5. Wielomiany.

(324) -5, -2, -3
(325) 4, 6 i 8
(326) $a = 4$

(327) $a = 11, b = 6$
(328) $m = 3$
(329) $r = -1$
(330) $m = 1$
(331) $a = 4, b = -2$
(332) $a \in \{-3, -2, 2, 3\}$
(333) $W(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$. Może też być $(-x^2 + 2x - 3)^2$
(334) $(m = 3, n = 2)$ lub $(m = -1, n = -2)$
(335) $a = -1, b = 6, x \in \langle -3, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$
(336) Pozostałe pierwiastki: $-\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3}$
(337) $x = 2 \ \ (d = -25)$
(338) $W(14) = 12$
(339) $x_1 = 4, x_2 = -1 - \sqrt{7}, x_3 = -1 + \sqrt{7}(b = -2, c = -14)$
(340) $W(10) = -30$, gdyż $W(x) = -\frac{1}{8}(x - 2)(x - 4)(x - 5)$
(341) $W(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3)$
(342) $c \in (-\infty, 1) \setminus \{-8\}$
(343) $b \in (-\infty, -2)$
(344) $b \in (-8, -5) \cup (-5, -4) \cup (4, +\infty)$
(345) $m \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \setminus \{-\frac{5}{13}\}$
(346) $m \in (\frac{3}{4}, +\infty) \setminus \{3\}$
(347) $p \in (-\infty, 0\rangle \cup (4, +\infty)$
(348) $x \in \{-1\} \cup \langle 3, +\infty)$ $(m = 1)$
(349) Z rysunku widać, że $W(x) = a(x+6)(x+5)(x+3)$. Z faktu, że $W(0) = 90$ mamy $a = 1$. Więc $-f(-x) = -(-x + 6)(-x + 5)(-x + 3) = g(x)$.
(350) $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
(351) $p \in (-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty)$
(352) $a = 11, b = 6$
(353) $m = -1 \vee m = -\frac{1}{3}$
(354) $m = 1 \vee m = -8 \vee m = 10$
(355) $W(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 1)$
(356) $m = 6$, pierwiastki: $-2, \frac{1}{4}, 3$.
(357) $m = -3 \vee m = 0$.
(358) $m = 1, x \in (-\infty, -3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, 2\right\rangle$.
(359) $(a = -8, b = 22)$ lub $(a = 8, b = 10)$.
(360) dowód - $W(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 3)(x - 5).W(2n + 1) = \frac{1}{2}2n(2n - 2)(2n - 4) = 4n(n - 1)(n - 2)$. Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6, a zwiększony czterokrotnie - przez 24.
(361) $m = 1$, pierwiastki: $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.
(362) $m = 0$
(363) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.
(364) $m \in (-\infty, -2) \setminus \{\frac{3}{2}\} \cup (6, +\infty)$
(365) $m \in (-2, 0) \setminus \{-1\} \cup (8, +\infty)$
(366) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{3}{2}$.

17.6. Funkcje wymierne.

(367) $m \in \{15, 16\}$
(368) $x = -3$ $(b = 2, c = -3)$.
(369) $m \in (\frac{1}{4}, 2) \cup (4, +\infty)$

(370) $m = -7 \vee m = 2$
(371) $m \in (0,4) \setminus \{2\}$.

17.7. Działania na potęgach.

(372) $a = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{6-2\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}}$; $4b = 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1} = 2^2 \cdot 2^{1-\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}}$.
(373) stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy otrzymamy $12+2\sqrt{36-11} = 22$.
(374) $9^a + 9^{-a} = 47; 81^a + 81^{-a} = 2207$
(375) $9\sqrt{A} = 3^2 \cdot (3^{4\sqrt{2}+2})^{\frac{1}{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}+1} = B$.
(376) $a = 6, b = 9, a^b > b^a$.
(377) $L(t) = 240000 \cdot 1,05^t$, 5 lat
(378) $L(t) = 555 \cdot (0,955)^t, L(15) \approx 278$.
(379) około $3,36$g, po dodatkowych 11 latach.

17.8. Logarytmy.

(380) 3-2+4=5
(381) $\log_6 6 + \log_3 27 = 1 + 3 = 4$
(382) 2
(383) 1
(384) 1
(385) $25 + \frac{216}{4} = 79$
(386) -1
(387) $\log_3 10 = a+b$; $\log_3 6 = a+1$; $\log_3(0,4) = a-b$; $\log_3 60 = 2a+b+1$; $\log_9(1,5) = \frac{1}{2}(1-a)$; $\log_{50} 20 = \frac{2a+b}{a+2b}$
(388) 1
(389) dowód: $\log_7 27 = \frac{\log_{21} 27}{\log_{21} 7} = \frac{3\log_{21} 3}{m} = \frac{3\log_{21}\frac{21}{7}}{m} = \frac{3(1-m)}{m}$
(390) dowód: $\log_2(2bc) = \log_2(c^2+b^2) \Rightarrow (b-c)^2 = 0 \Rightarrow b = c$
(391) $D_f = (3,4) \setminus \{\sqrt{15}\}$
(392) -1
(393) 1
(394) $\log_a b = 1$ lub $\log_a b = 2$
(395) $x \in (-4,-2) \cup (-2,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},2) \cup (2,+\infty)$
(396) $\frac{4}{\log_2 18-1} = \frac{4}{\log_2 18-\log_2 2} = \frac{4}{\log_2 9} = \frac{4}{2\log_2 3} = \frac{2}{\log_2 3} = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_3 4$
(397) $\frac{6a}{1-a} = \frac{6\log_{12} 2}{\log_{12} 12-\log_{12} 2} = \frac{\log_{12} 64}{\log_{12} 6} = \log_6 64$.

17.9. Trygonometria.

(398) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$
(399) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \cos\alpha = -\frac{2}{3}$
(400) $\frac{11}{16}$
(401) dowód - wskazówka: $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$
(402) dowód - $1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ i wspólny mianownik, mianownik całego ułamka tak samo.
(403) dowód - jedynka np. $\cos^4\alpha = (1-\sin^2\alpha)^2$
(404) dowód - $1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ i wspólny mianownik
(405) dowód - wspólny mianownik lub sprytnie - pomnożyć pierwszy ułamek przez $\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$
(406) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(407) $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
(408) $-\frac{7}{8}$
(409) $-\frac{336}{625}$
(410) dowód - zamień mianownik lewej strony na kwadrat sumy stosując jedynkę trygonometryczną oraz wzór na $\sin 2\alpha$
(411) $\sin 2x = m^2 - 1, |\cos x - \sin x| = \sqrt{2-m^2}, \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{2}{m^2-1}, \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3m-m^3}{2}$
(412) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
(413) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
(414) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$
(415) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
(416) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
(417) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
(418) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
(419) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
(420) $x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
(421) $x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(422) $x \in \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$
(423) $x \in \{0, 2\pi, 4\pi\}$
(424) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi$
(425) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
(426) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
(427) $x = k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
(428) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(429) $x = 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
(430) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, pamiętać o dziedzinie!
(431) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
(432) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$
(433) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(434) $x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
(435) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
(436) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{-7\pi}{12} + 2k\pi$
(437) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$
(438) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k\pi$
(439) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$
(440) $\frac{7\sqrt{5}}{27}$
(441) $x \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\}$.
(442) $x = 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
(443) $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$.
(444) $x \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\}$.
(445) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \vee x = 2k\pi$.
(446) $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\}$.
(447) $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}$.
(448) $x = \pi \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$.
(449) $x = \frac{7\pi}{18} \vee x = \frac{11\pi}{18} \vee x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3}$.
(450) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \vee x = k\pi$.

(451) $x = \frac{\pi}{6} \lor x = \frac{5\pi}{6}$.
(452) $x = \frac{\pi}{4} \lor x = \frac{7\pi}{12}$.
(453) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(454) $x = \frac{\pi}{4} \lor x = \frac{\pi}{3} \lor x = \frac{5\pi}{4} \lor x = \frac{5\pi}{3}$.
(455) wskazówka - zapisz $\sin^4 \alpha$ jako $(1 - \cos^2 \alpha)^2$ oraz $\cos^2 2\alpha$ jako $(1 - 2\cos^2 \alpha)^2$.
(456) $x = -\frac{\pi}{6} \lor x = -\frac{5\pi}{6} \lor x = -\frac{\pi}{2}$.
(457) $x = \frac{5\pi}{12} \lor x = \frac{13\pi}{12}$.
(458) $x = \frac{k\pi}{2} \lor x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.
(459) $x = \frac{\pi}{3} \lor x = \frac{\pi}{2} \lor x = \frac{3\pi}{2} \lor x = \frac{5\pi}{3}$.
(460) $x = \frac{2\pi}{3} \lor x = \frac{4\pi}{3}$
(461) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \lor x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$
(462) $x = \pi \lor x = \frac{7\pi}{6} \lor x = \frac{11\pi}{6} \lor x = 2\pi$.

17.10. Ciągi.

(463) $a_3 = 3, a_{n+1} = -n^2 + 2n + 3, a_7 = -21$.
(464) rosnący
(465) malejący
(466) $a_1 = -2, a_2 = 4, a_3 = 16, a_{10} = 268, a_n = 3n^2 - 3n - 2$
(467) szósty
(468) $a_1 = 9,\ r = -2,\ a_8 = -5$
(469) $a_n = 8n - 7,\ a_{n+1} - a_n = 8$=const, 13 wyrazów
(470) $a_4 + a_8 + a_9 = 30,\ S_{13} = 130$
(471) 11 wyrazów
(472) 1665
(473) 1311
(474) 1225
(475) 12 liczb
(476) $x = -1$ lub $x = 4$
(477) $x = 5,\ S_{10} = 410$
(478) $a_1 = 27,\ q = \frac{1}{3},\ a_n = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
(479) $a_5 = -160$
(480) $q = 4$
(481) $(a, b, c) = (5, 11, 17)$ lub $(a, b, c) = (20, 11, 2)$
(482) $(a, b, c) = (4, 6, 9)$ lub $(a, b, c) = (9, 6, 4)$
(483) $(a, b, c) = (8, 12, 18)$
(484) $(a, b, c) = (2, -4, 8)$ lub $(a, b, c) = (\frac{10}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{40}{9})$.
(485) 27 lub $\frac{125}{7}$
(486) $S = a_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2a_1 = 4a_2$
(487) $a = 23, b = -15$
(488) $a = 39, b = -27$
(489) -3
(490) 1
(491) 4
(492) -3
(493) $+\infty$
(494) 0
(495) $-\infty$

(496) $\frac{1}{2}$
(497) $\frac{-3}{2}$
(498) 6
(499) $(1, 3, 9)$ lub $(9, 3, 1)$
(500) $q = 2$
(501) $a = 8, b = 12, c = 18$
(502) 1
(503) $q = 4$, $\frac{S_{19}}{S_{20}} = \frac{4^{19}-1}{4^{20}-1}$ i dowodzoną nierówność można równoważnie przekształcić np. do nierówności $-4 < -1$.
(504) $S_6 = 728$
(505) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
(506) $a_1 = -2, r = 3$
(507) $q = 3$
(508) $q = \frac{1}{2}$
(509) $\frac{3}{2}$
(510) $S_{50} = 10150$, granica wynosi $\frac{2}{3}$.
(511) Z równań $2b = a + c$ oraz $b^2 = ac$ otrzymujemy np. równanie $(a - c)^2 = 0$ skąd $a = c = b$.
(512) $(4, 12, 36)$ lub $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$
(513) $a = 33, b = 11, c = -11$ lub $a = 9, b = 11, c = 13$.
(514) $q = \frac{1}{100}$.
(515) $(a = -19, b = 39, c = 28)$ lub $(a = -3.b = -6, c = 8)$ lub $(a = 6.b = 3.c = -10)$.
(516) 187
(517) $(a = 5, b = 9, c = 13)$ lub $\left(a = \frac{31}{2}, b = 9, c = \frac{5}{2}\right)$.
(518) $n = 15$
(519) $\frac{20}{21}$
(520) $q = \frac{1}{3}$.
(521) $a_1 = 3$.
(522) $\frac{5}{4}$
(523) $n = 37$
(524) $(-3, 6, -12)$ lub $\left(-\frac{7}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{28}{9}\right)$
(525) $a_1 = 10$, ciąg nie jest malejący (np. $a_5 = a_4$),
(526) $a_1 = \frac{1}{7}$.
(527) $a_n = 3n + 2, b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.
(528) $aq = 3$
(529) 438
(530) $S = \frac{\pi}{3}$
(531) $k = \frac{2}{3} \vee k = 2\sqrt{3} \vee k = 18$.
(532) $q = \frac{1}{3}$, $S_{100} = -4950$.
(533) $S = a^2\sqrt{3}$.
(534) $(a = 2, b = 6, c = 18)$ lub $(a = 18, b = 6, c = 2)$.
(535) $a_1 = 9, q = \frac{2}{3}$.
(536) $q = \frac{1}{5} \vee q = \frac{4}{5}$.
(537) $x = \frac{1}{2}$. Suma istnieje dla $x \in (-1, 1)$.
(538) $x = 3 \vee x = 6$. Suma istnieje dla $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
(539) Suma pól wynosi $2a^2$, a suma obwodów $(8 + 4\sqrt{2})a$.

(540) $S = 12\sqrt{3}$.
(541) $S_8 = 765$
(542) $n = 8$

17.11. Planimetria.

(543) $|AC| = 8, |AB| = 4\sqrt{3}, |BD| = 2\sqrt{3}$
(544) 10
(545) $P = 300$, $|AD| = 24$, $|BD| = 18$, $|DC| = 7$
(546) obwód = 46,8
(547) $P = 6\sqrt{3}, c = 7, h_b = 4\sqrt{3}$
(548) $\gamma = 120°$
(549) $|AD| = 4\sqrt{10}$
(550) $P = 126, r = \frac{14}{3}, R = \frac{65}{6}, h_a = 12$
(551) $b = 3$
(552) $P = 16\pi$
(553) $d = 7$. Zastosuj twierdzenie kosinusów w trójkątach ADC i BDC z kosinusami kątów ADC i BDC i skorzystaj z faktu, że $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.
(554) $CD = 6$. Wskazówka: $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC} + P_{\Delta DBC}$ - wzory na pole z sinusem.
(555) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
(556) $h_c = 4,8, r = 2, R = 5$
(557) 3 i 2.
(558) $\sqrt{4 + \sqrt{3}}$
(559) $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{10}$
(560) $4\sqrt{10}$
(561) $\frac{20\sqrt{7}}{7}$
(562) $\frac{2}{5}$
(563) 294
(564) $c = 10$
(565) $P = 600$
(566) 240
(567) 41
(568) 12π
(569) $4(\sqrt{2} - 1)$
(570) $R = 3$
(571) 32
(572) obwód = 20
(573) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$
(574) $60°$, $2\sqrt{19}$
(575) $a = \sqrt{17}$, $P = 8\sqrt{2}$
(576) hd
(577) $P = 80$, $a = 16$, $b = 4$, $d = 2\sqrt{41}$
(578) $r = 1,5$, $R = \frac{10}{3}$
(579) $h = 4$, $d_1 = 0,8$, $d_2 = 3,2$, $d_3 = d_4 = 1,28$
(580) $\frac{8640}{169}$
(581) $r = 2$
(582) Pole koła $= 144\pi$, $a = 30, b = 20$, Pole trapezu $= 600$
(583) $|AC| = \sqrt{91}$, $|BD| = \frac{14\sqrt{91}}{13}$

(584) $|AC| = 7$, obwód=21, $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.
(585) 7 i 1
(586) $4\sqrt{3} - 6$
(587) $12 : 5$
(588) 3
(589) 6
(590) $10 + 2\sqrt{73} + 4\sqrt{13}$
(591) 8,5,2,5
(592) $156°$
(593) $n = 20$
(594) 24
(595) $3\sqrt{3}$
(596) $\frac{25}{4}r^2$
(597) $\frac{3}{5}$
(598) $\sqrt{3} - 1$. Sinus $15°$ liczymy ze wzoru na sinus różnicy.
(599) $P(c) = c\sqrt{-3c^2 + 120c - 900}$, $c \in (15, 30)$.
(600) $|AB| = 42, |AE| = 33, |BE| = 9$
(601) $|AD| = |BC| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r, \cos|\sphericalangle CBD| = \frac{61\sqrt{89}}{623}$
(602) $\cos\alpha = \frac{7}{8}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$.
(603) $60°$
(604) $\frac{21}{5}$
(605) $\frac{4\sqrt{21}}{3}$
(606) $P = \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)}$
(607) $P = 84$
(608) $\sqrt{\frac{253}{13}}$
(609) 120
(610) $\frac{43}{45}$
(611) $\frac{4}{5}$
(612) $|BD| = 25, P_{ABCD} = 234, |AC| = 20$.
(613) 4
(614) $|AB| = \frac{15}{2}, |BC| = \frac{27-10\sqrt{3}}{2}, |BD| = \frac{15+5\sqrt{21}}{4}$.
(615) $\sqrt{145}$
(616) $|AB| = 20$
(617) $\frac{\sqrt{7}-1}{4}, \frac{\sqrt{7}+1}{4}$.
(618) $P = (252 - 144\sqrt{3})\pi$.
(619) $P = 72$
(620) $P_{AMS} = 40$, $P_{ALS} = 45$, $P_{BMS} = 80$ i $P_{CLS} = 135$.
(621) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$.
(622) $\sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$
(623) $P = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.
(624) $\cos|\sphericalangle ABC| = \cos|\sphericalangle CAB| = \frac{1}{4}$. $\cos|\sphericalangle BCA| = \frac{7}{8}$.
(625) $|\sphericalangle CDE| = 72°, |\sphericalangle DCE| = 72°, |\sphericalangle CED| = 36°$.

17.12. Dowody planimetryczne.

(626) Wskazówka: $\cos\gamma = \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
(627) Zauważ, że suma kątów przy jednym ramieniu trapezu wynosi $180°$

(628) Zauważ, że punkty łączące środek okręgu z końcami ramion są dwusiecznymi kątów trapezu (z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika przystawanie mniejszych trójkątów prostokątnych)

(629) Wykaż najpierw, że $|EB| = |BC|$ oraz że obwód trapezu wynosi $4|BC|$

(630) Poprowadź odcinek równoległy do podstaw o końcu w punkcie przecięcia przekątnych i skorzystaj z twierdzienia Talesa (ew. podobieństwa trójkątów) dwukrotnie - zarówno wykorzystując dłuższą, jak i krótszą podstawę. Rozwiązując odpowiedni układ równań otrzymamy tezę.

(631) Można opisać okrąg, bo $|\angle CKS|+|\angle CLS| = 180°$. Promienie okręgów są równe, bo korzystając z tw. sinusów mamy $2R_{ABC} = \frac{|AB|}{\sin\gamma}$ oraz $2R_{ABS} = \frac{|AB|}{\sin(180°-\gamma)}$.

(632) Wykaż najpierw, że te trójkąty są podobne (cecha kkk), a następnie ustal skalę podobieństwa.

(633) Oznacz K - punkt przecięcia AB i PC oraz skorzystaj z podobieństwa trójkątów APK i BKC a następnie KBP i KAC. Z odpowiednich proporcji otrzymamy tezę. Można też od początku skorzystać tw. kosinusów.

(634) Trójkąty równoramienne mają parę kątów takich samych plus zastosuj twierdzenie o kącie wpisanym i dopisanym (lub dorysuj promień OC).

(635) wskazówka - udowodnij, że kosinusy tych kątów są takie same.

(636) wskazówka - najszybciej z podobieństwa trójkątów ABE do DEG oraz ADE do BFE ale można także np. ADG do FCG.

(637) sinus wynosi $\frac{8}{17}$. Najszybciej z pola trójkąta lub ze wzoru na sinus podwojonego kąta.

(638) Wskazówka - podwójne tw. kosinusów.

(639) Wskazówka - np. z twierdzenia sinusów mamy $2R = \frac{d}{\frac{h}{c}}$ gdzie h jest wysokością trapezu. Następnie trzeba wykorzystać równości $a+b = 2c$ oraz $c^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2$.

(640) wskazówka - poprowadź odcinek z wierzchołka kąta prostego do środka większego okręgu i zauważ, że jest to przekątna kwadratu.

(641) dowód - jeśli $|AB| = a$. $|CD| = b$ i $|AD| = |CB| = c$, to z warunku wpisywalności okręgu mamy $2c = a+b$ oraz z tw. Pitagorasa mamy $4r^2 = (2r)^2 = c^2-(a-b)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = ab$.

(642) Skoro $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180°$, to $4\alpha = 102\frac{6}{7}^{\circ}$, więc ten trójkąt jest rozwartokątny. Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym kąt BSC ma miarę 2α, a kąt ASC ma miarę 4α. Więc ciąg $6\alpha, 4\alpha, 2\alpha$ jest arytmetyczny o różnicy -2α.

(643) wskazówka - oznacz kąty przy wierzchołkach A, B, C, D jako $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ i skorzystaj z faktu, że suma miar kątów w czworokącie jest równa 360°.

(644) wskazówka - podobieństwo trójkątów DAB, DNM i SEN gdzie E jest punktem styczności okręgu z odcinkiem DN. Dużo rozwiązań jest na stronie CKE, najszybsze jest pierwsze, ale moim zdaniem najłatwiej wpaść na trzecie.

(645) wskazówka - skorzystaj ze wzoru na pole trójkąta z sinusem w trójkątach ABC, ABE i BCE.

(646) wskazówka - oznacz kąty dzielone przez dwusieczne literami greckimi i następnie pokaż, że suma kątów LKN i LMN jest równa 180°.

(647) wskazówka - podobieństwo trójkątów / twierdzenie Talesa

(648) wskazówki - zauważ, że $|KM| = |KP|$, trójkąty KCP i ACD są podobne, a także można skorzystać z równości $|MD| = |PD|$.

(649) wskazówka - albo dorysuj odcinek AP i zauważ że trójkąty APD i BPD mają wspólną wysokość więc łatwo określić stosunek ich pól. Tak samo trójkąty APE i CPE. Można też skorzystać z podobieństwa np. trójkątów ABE i PDB.
(650) wskazówka - skorzystaj z podobieństwa trójkątów BKC i BDE oraz trójkątów ACL i AGF.
(651) wskazówka - oblicz miary kątów DFE, DFG a następnie EFG.
(652) wskazówka - punkt S jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów CAB i CBA.
(653) wskazówka - sposób 1 - poprowadź dwusieczną kąta BAC i znajdź trójkąty podobne. Sposób 2 - skorzystaj z twierdzenia sinusów oraz twierdzenia kosinusów dla kąta ABC.
(654) wskazówka - oznacz przez S środek okręgu, oblicz miary kątów P_1SP_{11} oraz $P_{22}SP_{16}$ i skorzystaj z faktu, że miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.
(655) wskazówka - zastosuj twierdzenie sinusów z promieniem okręgu, wstaw do nierówności z założenia, a następnie twierdzenie kosinusów dla kąta γ. Inny sposób (czysto trygonometryczny) polega na zamianie kąta γ na $180° - (\alpha + \beta)$.
(656) wskazówka - wybierz jeden dowolny bok i uzależnij za pomocą funkcji trygonometrycznych pozostałe boki od niego.
(657) wskazówka - oznacz krótszy bok jakąś literą, uzależnij pozostałe boki od niej i skorzystaj ze wzoru np. na sinus sumy.
(658) wskazówka - oblicz długość odcinka GD i zauważ, że trójkąty AGH i HDE są podobne.

17.13. Geometria analityczna.

(659) $y = 2x - 8$
(660) $y = -3x + 8$
(661) $y = \frac{1}{3}x - 12$
(662) $y = \sqrt{3}x + 1$
(663) $A(-2, 11)$
(664) $m \in (\sqrt{6}, +\infty)$
(665) $|AB| = 13$
(666) $x = 4$ lub $x = \frac{6}{5}$
(667) $B(-1, 1)$ oraz $C(1, 5)$
(668) $S(-2, 9)$
(669) $y = \frac{1}{2}x - 2$
(670) $A'(-3, 5)$
(671) $B(2, 3)$
(672) $C(3, 8)$
(673) $d = 8$
(674) $P = 20$
(675) $r = \sqrt{5},\ B(6, 3)$
(676) $k : y = -5x + 13$
(677) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
(678) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ lub $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$
(679) $y = -\frac{4}{3}x - \frac{28}{3}$ i $y = \frac{3}{4}x - 1$
(680) $b \in (-17, 17)$
(681) $m = -22$ lub $m = 3$
(682) $y = -2x + 10$ oraz $y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{2}$

(683) $C(3,3;4,7)$
(684) $B(-1,2)$, $C(6,6)$ lub $C(-2,-6)$
(685) $B(0,0), C(-4,6), D(2,10)$
(686) $C(-1,5), D\left(3, \frac{9}{2}\right), P = \frac{65}{2}$
(687) Jeśli $P \in y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, to $P\left(x, \frac{1}{4}x^2 + 1\right)$, więc $|AP| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1 = d(P, OY)$
(688) $A(3,9), B(3-\sqrt{3},6), C(3+\sqrt{3},6)$
(689) $C(6,6), D(2,6)$ lub $C(1+\sqrt{13}, 3\sqrt{13}-3), D(7-\sqrt{13}, 3\sqrt{13}-3)$
(690) $B(7,3)$ oraz $C(4,9)$.
(691) $A(9,-3)$, $B(9,9)$, $P = 48$
(692) $m = 7$
(693) $B\left(\frac{53}{5}, -\frac{31}{5}\right), C(-2,-3), D\left(-\frac{43}{5}, \frac{41}{5}\right)$
(694) 100
(695) $y = x - 3$, $a = 2\sqrt{2}$
(696) $B(-8+2\sqrt{3}, 5+4\sqrt{3}), C(-8-2\sqrt{3}, 5-4\sqrt{3})$
(697) $m = 0, A(0,-3), B(6,-5), C(4,1), D(-2,3), P = 32, \cos\alpha = -\frac{3}{5}$, równanie okręgu: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{32}{5}$
(698) $m = 10$
(699) $C(3,3)$ lub $C(4,4)$
(700) $A(-2,0)$, $B(-1,-3)$, $C(0,-4)$ oraz $D(3,5)$.
(701) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ oraz $(x+15)^2 + (y-15)^2 = 225$
(702) $C(0,8)$. Skoro AB-średnica, to $AC \perp BC$. Wyznaczamy równanie prostej BC i z układu równań współrzędne C.
(703) Sprawdzamy, czy punkt D spełnia równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC lub czy symetralne wszystkich boków przecinają się w jednym punkcie. Można też sprawdzić, czy przeciwległe kąty mają takie miary, że ich suma wynosi 180° (ich kosinusy są liczbami przeciwnymi).
(704) Jeśli przez d oznaczymy odległość punktu $A(x, x^2)$ od prostej $y = 2x - 6$, to otrzymamy nierówność $d \geqslant \sqrt{5}$, którą łatwo udowodnimy korzystając z faktu, że wyrażenie pod wartością bezwzględną jest stałego znaku.
(705) $(x+2)^2 + y^2 = 25$; $y = -7x - 10$ lub $y = -7x + 10$.
(706) $C(1,1)$ lub $C\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$
(707) $A(-1,-3), B(1,-3), C(3,5), D(-3,5)$, okrąg $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$.
(708) $y\frac{3}{4}x - 1$.
(709) 90°
(710) $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$
(711) $m = -3$
(712) $y = -\frac{sqrt3}{3}x + 6\sqrt{3}$
(713) $a \in \left(-1, \frac{5}{2}\right)$
(714) $D(6,2), C\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$
(715) $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.
(716) $B\left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right), C\left(-3, -\frac{13}{3}\right)$
(717) $r = 5\sqrt{2}, P(7,1)$.

(718) $P(m)=\frac{1}{2}|m^2-m-2|$, trójkąt ostrokątny dla $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},-2\right) \cup \left(1,\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.
(719) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
(720) $C(1-\sqrt{5},3+\sqrt{5}) \vee C(1+\sqrt{5},3-\sqrt{5})$
(721) $A(2,0), B\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.
(722) $r=\frac{11}{35}$
(723) $C(6,12)$
(724) $y=-\frac{1}{8}x+3$ lub $y=-\frac{1}{2}x+6$
(725) $A(0,0), B(0,25), C(12,9)$
(726) $r=2\sqrt{5}$
(727) $m \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{12}{5},+\infty\right)$.
(728) $P=36$
(729) $C(3,0)$.
(730) $B(24,1), C(4,11), D(-18,7)$.
(731) $\vec{AB}=[12,-5]$, $|\vec{AB}|=13$
(732) $C(7,-3), A(-1,-5)$.
(733) układ równań, $\vec{AB}=[2,2], |AB|=2\sqrt{2}$.
(734) $P=63$
(735) $A(3,0), B\left(-\frac{21}{13},\frac{40}{13}\right)$.
(736) $(-3,5)$ oraz $(1,7)$
(737) $(-4,2)$, $(-3,11)$, $(-2,-2)$ oraz $(1,7)$
(738) $D(12,6)$
(739) $\frac{2}{9}$

17.14. Stereometria.

(740) $12+12\sqrt{3}$
(741) $V=9\sqrt{6}$
(742) $P_c=16\sqrt{3}+24\sqrt{2}$, $(H=2)$
(743) $V=192$
(744) $V=132\sqrt{3}$
(745) $V=\frac{H^3}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$
(746) $V=6,4$
(747) $V=64$
(748) $V=8$
(749) $V=87360$
(750) $V=64$
(751) $a=2$
(752) $V=9\sqrt{3}$
(753) $V=3\sqrt{3}$
(754) $V=\frac{\sqrt{39}}{6}$
(755) $\sqrt{2}$
(756) $19,2$
(757) 20
(758) $V=20\sqrt{83}$. Jeśli ABC to podstawa tego czworościanu, to wystarczy rozważyć trójkąt CDE, gdzie E jest środkiem odcinka AB. Mamy $|CD|=10$ oraz

$|CE| = |DE| = 6\sqrt{3}$. Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka D jest wysokością czworościanu.

(759) $V = 40, \operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{12}$
(760) $V = 12\sqrt{7}$
(761) $V = \frac{9}{4}$
(762) $h = \frac{\sqrt{42}}{2}$
(763) $V = \frac{500\sqrt{7}}{9}$
(764) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $P_p = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.
(765) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$
(766) $V = 20\sqrt{11}$.
(767) $P = \frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}a^2$
(768) dowód
(769) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.
(770) $V = 1760\sqrt{210}$
(771) $V = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$
(772) $V = 15360$
(773) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
(774) $V = \frac{500}{3}$
(775) $V = 624$
(776) $V = 4320$
(777) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$
(778) $V = 2500$
(779) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
(780) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
(781) $V = \frac{a^3}{6} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$.
(782) $V = 144$
(783) $P = \frac{\sqrt{6}}{8}a^2$.
(784) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.
(785) $P = 20$
(786) $P = 2\sqrt{3}$
(787) $P = \sqrt{3}$.

17.15. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.

(788) 50
(789) $5^3 = 125$
(790) $6^3 = 216$
(791) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
(792) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
(793) $5! = 120$
(794) $6! = 720$
(795) $\binom{7}{3} = 35$
(796) $\binom{7}{3} = 35$
(797) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} = 60$
(798) $4 \cdot 5^7 = 312500$
(799) 192080

(800) 4200
(801) 6475
(802) 120
(803) 280
(804) $9 \cdot 10^7 - 9^8 = 46953729$
(805) 24
(806) 50
(807) $\binom{9}{5} \cdot 2^4 = 2016$
(808) $\frac{125}{216}$
(809) $\frac{91}{216}$
(810) $\frac{25}{72}$
(811) $\frac{5}{72}$
(812) $\frac{5}{8}$
(813) $\frac{13}{216}$
(814) $\frac{25}{64}$
(815) $\frac{15}{32}$
(816) $\frac{5}{14}$
(817) $\frac{15}{28}$
(818) $\frac{3}{22}$
(819) $\frac{21}{55}$
(820) $\frac{3}{11}$
(821) $\frac{3}{44}$
(822) 8
(823) 21 uczniów
(824) $\frac{227}{648}$
(825) co najmniej 7 kul
(826) $\frac{2}{3}$
(827) $\frac{7}{11}$
(828) $\frac{11}{21}$
(829) $\frac{3}{5}$. Jest 10 liczb czterocyfrowych o sumie cyfr równej 3, z czego sześć posiada na początku „jedynkę".
(830) $0,4$
(831) $0,4$
(832) $\frac{47}{130}$
(833) $\frac{1}{3}$
(834) 22400
(835) 1036000
(836) 37512
(837) 89181
(838) 30951
(839) 89667
(840) 428652
(841) 2722000
(842) 35 (z ósemką 5, z czwórką i dwójką 20, a z trzema dwójkami - 10)
(843) $P(A|B) = \frac{7}{15}$ Wszystkich liczb o sumie cyfr 3 jest 15, w tym w ośmiu (21000, 20100, 20010, 20001, 12000, 10200, 10020, 10002) dwójka występuje.

(844) $P(A) = \frac{9}{28} = (\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10})$ - te ostatnie prawdopododobieństwa liczymy klasycznie albo jak kto woli (nie polecam) - drzewkami z 4 gałęziami.

(845) 6375 (0 parzystych - 625 liczb, 1 parzysta - 2375, dwie parzyste - 3375). Można też od wszystkich odjąć te, które mają co najmniej 3 cyfry parzyste.

(846) 7 kobiet i 14 mężczyzn

(847) 4 kule lub 8 kul

(848) $\frac{1}{4}$

(849) $\frac{5}{16}$

(850) $\frac{3}{16}$

(851) $\frac{15625}{46656}$

(852) $\frac{12281}{46656}$

(853) $0,4116$

(854) $\frac{103}{729}$

(855) $n = 4$

(856) 280 liczb

(857) 1920 liczb

(858) $\frac{5}{108}$

(859) $\frac{1}{6}$

(860) $\frac{5}{11}$

(861) $\frac{113}{150}$

(862) Miejsca dla jedynek możemy wybrać na $\binom{10}{3}$ sposobów, a na każdym z pozostałych 7 miejsc możemy umieścić dwójkę lub trójkę, co można zrobić na 2^7 sposobów. $\binom{10}{3}\cdot 2^7 = 15360$.

(863) $\frac{11}{16}$

(864) $\frac{5}{14}$

(865) 6666600

(866) 12960 liczb

(867) $\frac{1}{5}$

(868) 180 liczb

(869) $\frac{5}{12}$

(870) 44361 liczb

(871) 28750 liczb

(872) 18 liczb

(873) $\frac{11}{699840}$

(874) 171700 liczb

(875) $\frac{30}{91}$

(876) $P(A) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{1}{3}$.

(877) $\frac{1}{35}$

(878) 6 partii

(879) $0,49$

(880) $\frac{5103}{16384}$

(881) 10 rzutów

(882) $n = 10$

17.16. Analiza matematyczna i zadania optymalizacyjne.

(883) $\frac{1}{6}$

(884) -3

(885) 5

(886) $-\frac{2}{5}$
(887) $\frac{5}{48}$
(888) $-\frac{1}{20}$
(889) 3,
(890) -2
(891) $-\infty$
(892) $-\infty$
(893) 9
(894) -2
(895) $m = 2$
(896) $f'(x) = 2x - 6$
(897) $g'(x) = x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
(898) $h'(x) = 5x^4(3x^2 - x + \frac{1}{x}) + (x^5 + 1)(6x - 1 - \frac{1}{x^2})$
(899) $p'(x) = \frac{2x(3x+7)-(x^2-1)\cdot 3}{(3x+7)^2}$
(900) 0
(901) $x \in \langle -1, +\infty) \setminus \{0\}$
(902) $y = 4x - 6$
(903) $y = 3x - 25$
(904) $d = \sqrt{5}$, równanie stycznej k: $y = 2x - 5$
(905) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{27}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{27}$
(906) maksimum lokalne w $x = -4$, minimum lokalne w $x = -2$
(907) maksimum lokalne w $x = -1$, minima lokalne w $x = -2$ i $x = 3$; funkcja rosnąca w $(-2, -1)$ oraz w $(3, +\infty)$, funkcja malejąca w $(-\infty, -2)$ oraz w $(-1, 3)$
(908) minimum lokalne w $x = 1$, funkcja rosnąca w $(1, +\infty)$, funkcja malejąca w $(-\infty, 0)$ oraz w $(0, 1)$
(909) $f_{MAX} = f(\frac{1}{2}) = 8,5$, $f_{MIN} = f(2) = 4$
(910) $f_{MIN} = f(2) = 12, f(1) = 17, f(3) = 14\frac{1}{3}$ więc $f_{MAX} = 17$
(911) Dwa różne pierwiastki dla $m \in (\frac{4}{3}, 8)$, $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ - MAX dla $m = 3$
(912) Dla $m = -\sqrt{7}$ wartość $(x_1x_2)^2 - 8(x_1 + x_2)$ wynosi $8 - 14\sqrt{7}$ i jest mniejsza niż drugie minimum lokalne w $m = 3$
(913) Punkt $A(2, 1)$, $d\Big(A, (0, 0)\Big) = \sqrt{5}$
(914) $C(2, 8)$, $D(-2, 8)$, $P = 64$, Jeśli oznaczyliśmy x jako pierwszą współrzędną C, to $x \in (0, 6)$, a jeśli D, to $x \in (-6, 0)$
(915) $A(3-\sqrt{3}, 0), B(3+\sqrt{3}, 0), C(3+\sqrt{3}, 6), D(3-\sqrt{3}, 6), P_{MAX} = 12\sqrt{3}$, Jeśli oznaczyliśmy x jako pierwszą współrzędną A, to $x \in (0, 3)$, a jeśli B, to $x \in (3, 6)$
(916) $y = -2x + 8$, $P = 16$
(917) $B(8, 3)$, $|AB| = 13$
(918) $|AB| = 4$, $P = 3\sqrt{3}$
(919) $P(x) = \frac{10x^2-100x}{x-20}, x \in (0, 10)$, Pole jest największe dla $x = 20 - 10\sqrt{2}$ i wynosi $300 - 200\sqrt{2}$
(920) $a = 2, h = 2, V_{MAX} = 2\sqrt{3}$, dziedzina: $a \in (0, 3)$ lub $h \in (0, 6)$
(921) $a = 4, h = 2\sqrt{2}, V_{MAX} = 8\sqrt{6}$, dziedzina: $a \in (0, 2\sqrt{6})$ lub $h \in (0, 2\sqrt{6})$
(922) $a = \sqrt[3]{V}, h = \sqrt[3]{V}, S_{MIN} = 12\sqrt[3]{V}$, dziedzina: $a \in (0, +\infty)$ lub $h \in (0, +\infty)$
(923) $a = 1, h = 1, P_{MIN} = 6$, dziedzina: $a \in (0, +\infty)$ lub $h \in (0, +\infty)$
(924) $A(6, 0)$, $B(0, 12)$
(925) $x = 2$

(926) Trójkąt istnieje dla $a \in (5, 12)$, Pole jest największe dla $a = 9$, $\cos\alpha = -0,2$.
(927) $f(q) = a_1 - a_3 = (1-q)(1-q^2)$, $q \in (-1, 1)$, $f - MAX$ dla $q = -\frac{1}{3}$.
(928) $-\frac{1}{2}$
(929) $a = h = \frac{\sqrt{6}}{6}$
(930) $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$
(931) $a = 5\sqrt{\frac{11}{3}}$
(932) $y = -2x + 6$
(933) $a \in (0, 4\sqrt{2})$, $V_{MAX} = \frac{128}{9}$.
(934) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$. Wskazówka - żeby otrzymać „ładną” funkcję - oznacz niewiadomą jako wysokość tego trójkąta lub różnicę między wysokością a promieniem.
(935) $A(4, 5)$
(936) Niech $B(0, y)$. Z tw. Talesa mamy $\frac{y}{x} = \frac{1}{x-8}$ skąd $y = \frac{x}{x-8}$, stąd już $|AB| = \sqrt{\left(\frac{x}{x-8}\right)^2 + x^2}$. Odcinek ten istnieje dla $x \in (8, +\infty)$, a najkrótszy jest dla $x = 10$. Wówczas $|AB| = \frac{5\sqrt{37}}{3}$.
(937) $a \in (6, +\infty)$, najmniejsze możliwe pole wynosi 64 dla $a = 12$.
(938) $a = 2m, h = \frac{2\sqrt{3}}{3}m$.
(939) $f_{MIN} = f(4) = \frac{26}{17}, f_{MAX} = f(1+\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}$
(940) $y = 4x + \frac{67}{27}$ oraz $y = 4x - 7$
(941) $P(x) = 4 + 2x - x^2 - \frac{1}{2}x^3, x \in (0, 2)$, pole jest największe dla $C\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$.
(942) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
(943) $P\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}-36}{36}\right)$
(944) $a \in (1, 2)$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$ dla $a = \sqrt{2}$.
(945) $b = 2019$.
(946) Najmniejsze pole wynosi $6\sqrt{3}$ dla $a = 2, h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
(947) $x = 100, y = 60$, w założeniu należy pamiętać, że $x + 10 > y + 6$.
(948) $x = 6, h = 4$, dziedzina: $x \in \langle 4, 9\rangle$ lub $h \in \left\langle \frac{16}{9}, 9\right\rangle$.
(949) -1
(950) $P(x) = 4x^2 + \frac{24}{x}$ dla $x \in (1, 2)$. Najmniejsze pole powierzchni całkowitej ma prostopadłościan o wymiarach $\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{3}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{3}$.
(951) $V(x) = 8(11x^2 - 3x^3), x \in \left(0, \frac{5}{2}\right), V_{MAX} = V\left(\frac{22}{9}\right) = \frac{42592}{243}$.
(952) $y = 6x - 8$
(953) $V(x) = 0,5x(x-30)(80-x), x \in (0, 25)$. V jest największa dla $x = 10$. $V(10) = 18000$.
(954) $y = 4x - 3$
(955) $a = 8, P = 12\sqrt{3}$.
(956) $D_f = (0, +\infty)$, $f(1) = -2$ - najmniejsza wartość
(957) 3 złote
(958) $x \in (0, 3)$, długość skoku jest największa dla $x = 1$ i wynosi 125m.
(959) $c = 0, d = 2, p = 1, q = -4$, jednocześnie rosnąca oraz przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (1, 2)$.

NOWE ZADANIA: 89-93, 137, 147, 148, 177-181, 186, 198-203, 233-245, 270-272, 280-282, 304-323, 355-366, 371, 377-379, 395-397, 442-463, 509-542, 544, 601-625, 640-658, 707-739, 767-797, 855-882, 938-959.